Übungen zu Topologie WS13/14, 6. Übung

1. Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, X eine Menge und C eine System von Teilmengen von X, welches bzgl. $\subseteq$ eine gerichtete Menge ist. Zeigen Sie, dass die Menge aller Mengen der Form $(C \in \mathcal{C}, U \in \mathcal{U})$

$$\{(f, g) \in M^X \times M^X : \forall x \in C \; : \; (f(x), g(x)) \in U\}$$

Filterbasis einer Uniformität $\hat{\mathcal{U}}_C$ auf M^X ist. Welche Uniformität ergibt sich, wenn $\mathcal{C}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X ist, und welche im Fall, dass $\mathcal{C} = \{X\}$ und $\mathcal{U}$ von einer Metrik erzeugt wird.

2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Mit A^0 wollen wir die Menge aller Kondensationspunkte bezeichnen, dh. alle $x \in X$, sodass jede Umgebung einen überabzählbaren Schnitt mit A hat. Zeigen Sie, dass Kondensationspunkte Häufungspunkte sind, dass A^0 abgeschlossen ist, dass $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$. Weiter zeige man, dass in Räumen mit dem $(ABII)$ die Menge $A \setminus A^0$ immer abzählbar ist und dass $(A^0)^0 = A^0$. Schließlich zeige man, dass sich jeder topologischer Raum mit dem $(ABII)$ in der Form $A \cup B = X$ mit disjunkten A und B schreiben lässt, wobei $A = \overline{A}$ keine isolierten Punkte hat und wobei B abzählbar ist.

   Hinweis: Für eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ betrachte $C := \{B \in \mathcal{B} : B \cap A \text{ ist abzählbar }\}$.

3. Sei (X, d) ein vollständig metrischer Raum ohne isolierte Punkte. Zeigen Sie, dass X eine homöomorphe Kopie der Kantorschen Menge enthält.

   Hinweis: Durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ definiere für $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$ offene Mengen $V_{i_1,\dots,i_k}$ mit Durchmesser kleiner $\frac{1}{k}$ und sodass

$$\overline{V_{i_1,\dots,i_{k-1},0}} \cap \overline{V_{i_1,\dots,i_{k-1},1}} = \emptyset, \;\; V_{i_1,\dots,i_{k-1}} \subseteq V_{i_1,\dots,i_k} \,.$$

4. Zeigen Sie, dass jeder separable und vollständig metrische Raum X entweder abzählbare Mächtigkeit oder die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat!

5. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten C eines Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ immer von der Form $\prod_{i \in I} C_i$ ist, wobei die C_i Zusammenhangskomponenten von $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ist.

6. Zeigen Sie fuer einen vollständig regulären Raum X, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn βX es ist. (Hinweis: Zeigen Sie fuer eine offen-abgeschlossenen Teilmenge A von X, dass βA zu $\overline{A}^{\beta X}$ homöomorph ist.)

   Zeigen Sie auch, dass für ein normales X und ein abgeschlossenes $A \subseteq X$ immer βA zu $\overline{A}^{\beta X}$ homöomorph ist.

7. Sei X ein regulärer topologischer Raum und $F \subseteq X$ eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in F und paarweise disjunkte O_n, $n \in \mathbb{N}$, gibt, sodass $a_n \in O_n$. Zeigen Sie auch dass jede Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist, wenn $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

8. Sei $F \subseteq \beta\mathbb{N}$ abgeschlossen und unendlich. Zeigen Sie, dass F eine zu $\beta\mathbb{N}$ homöomorphe Teilmenge hat!

   Hinweis: Sei A wie im vorherigen Beispiel. Ist $f : A \to [0,1]$, so betrachte man $g : \mathbb{N} \to [0,1]$ definiert durch $g(n) = f(a_j)$, falls $n \in O_j$ und $g(n) = 0$, falls $n \notin \bigcup_j O_j$. Betrachte nun eine stetige Fortsetzung von g auf $\beta\mathbb{N}$ eingeschränkt auf $\overline{A}^{\beta\mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit f auf A. Beachte dabei, dass $\overline{\mathbb{N} \cap O_j}^{\beta\mathbb{N}} = \overline{O_j}^{\beta\mathbb{N}}$ wegen der Dichtheit von $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$.

9. Zeigen Sie, dass in $\beta\mathbb{N}$ nur die ab einem Index konstanten Folgen konvergieren.

   Hinweis: Ist (x_n) konvergent gegen x, so ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ abgeschlossen.