Übungen zu Topologie 1. Übung 22. 10. 2014

Zeigen Sie:

1. Für topologische Räume X, Y mit $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt
   - $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$
   - $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$
   - $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$
2. Für topologische Räume $X_i, i \in I$ mit $A_i \subseteq X_i$ gilt
   - $\prod_{i \in I} A_i^\circ \supseteq (\prod_{i \in I} A_i)^\circ$ Gilt immer Gleicheit?
   - $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i$
3. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes X und f_i seien stetige Abbildungen von A in kompakte Intervalle $[a_i, b_i]$, $i \in I$. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung F der Funktion $f : A \to \prod_{i \in I}[a_i, b_i]$, $\mathrm{pr}_i(f((x)) = f_i(x)$ auf X: $F : X \to \prod_{i \in I}[a_i, b_i]$, $F(x) = f(x)$ für $x \in A$.
4. Sei X ein lokalkompakter T4-Raum und K eine kompakte Zusammenhangskomponente in X. O sei offen mit $K \subseteq O$. Dann gibt es eine Menge U, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist mit $K \subseteq U \subseteq O$.
5. Voraussetzungen wie im vorigen Beispiel, mit X zudem zusammenhängend. Dann ist für eine offene relativ kompakte Menge V keine Zusammenhangskomponente von $\bar{V}$ in V enthalten.
6. Eine Funktion f auf einem topologischen Raum X heißt lokal konstant, wenn es für $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, auf der f konstant ist. Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn jede lokal konstante Funktion auf X in eine Menge M konstant ist.
7. Die Sorgenfrey-Gerade R_S ist $\mathbb{R}$ mit der von der Basis aller halboffenen Intervalle $[a, b)$ induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass R_S nicht lokalkompakt aber total unzusammenhängend ist. (d.h. die Zusammenhangskomponenten bestehen aus einem Element).