Übungen zu Topologie 2. Übung 5. 11. 2014

Zeigen Sie:

1. Sei p aus $\mathbb{N}$, $p > 1$ und Ω_p die Menge aller Abbildungen a aus $\mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$, die für ein von a abhängiges $n_0 \in \mathbb{Z}$ $a(k) = 0$ für alle $k < n_0$ erfüllen, (doppelt unendliche Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit Werten in $\{0, \ldots, p-1\}$ mit $\lim_{k\to-\infty} a_k = 0$. Auf Ω_p wird eine Addition $a + b$ wie folgt erklärt: Sei $n := \min(n_0(a), n_0(b))$. Dann sei $(a + b)_k = 0$ für $k < n$. Wir setzen $t_{n-1} = 0$. Jede Summe $a_k + b_k + t_{k-1}$ kann eindeutig als $t_k p + r_k$ mit $t_k \in \{0, 1\}$ und $r_k \in \{0, \ldots, p-1\}$ geschrieben werden. Wir definieren induktiv $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_k = r_k$ für $k = n, n + 1, \ldots$.

   Zeigen Sie, dass Ω_p so zu einer Abelschen Gruppe wird. Sei $\Lambda_n := \{\mathbf{a} \in \Omega_p : a_i = 0 \,\forall i \leq n\}$. Dann definieren die Mengen $b+\Lambda_n$, $b \in \Omega_p$, $n \in \mathbb{Z}$ eine Basis einer Topologie mit der Ω_p eine topologische Gruppe wird.

2. Die Gruppe Ω_p aus dem vorigen Beispiel ist lokalkompakt.

3. Die Mengen Λ_n, $n \in \mathbb{Z}$ sind offene Untergruppen.

4. Ω_p ist total unzusammenhängend, die Zusammenhangskomponenen von $a \in \Omega_p$ ist also a.

5. Ist χ ein stetiger Charakter der lokalkompakten Gruppe Ω_p, so gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $\chi(\Lambda_n) = 1$. (Bsp. 3!).

6. Sei für χ ungleich dem trivialen Charakter $n_0(\chi) := \max\{n \in \mathbb{Z} : \chi(\Lambda_n) \neq \{1\}\}$. Dann ist χ auf Λ_{n_0} bereits durch durch $\chi(e_{n_0(\chi)})$ vollständig bestimmt, wenn $e_n \in \Omega_p$ durch

$$e_n(l) := \begin{cases} 0 & l \neq n \\ 1 & l = n \end{cases}$$

   definiert ist. $\chi(e_{n_0(\chi)})$ hat eine p-te Einheitswurzel als Wert.

7. Induktiv kann man χ auf $\Lambda_{n_0(\chi)-m}$ durch $\chi(e_{n_0(\chi)-1}), \chi(e_{n_0(\chi)-2}), \ldots$ definieren mit $\chi(e_{n_0(\chi)-m})$ ist eine p^{m+1}-te Einheitswurzel.

8. Es gilt für $a \in \Omega_p$ und χ ein stetiger Charakter:

$$\chi(a) = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \chi(e_m)^{a(m)},$$

   wobei dieses Produkt wohldefiniert ist, da fast alle Faktoren 1 sind.

9. Auf Ω_p ist eine Umgebungsbasis des trivialen Charakters in der k.o.-Topologie durch die Mengen

$$\hat{\Lambda}_n := \{\chi \in \hat{\Omega}_p : n_0(\chi) \leq n\}$$

gegeben.