Übungen zu Topologie 3. Übung 19. 11. 2014

Zeigen Sie:

1. Sei G eine multiplikativ geschriebene nicht notwendigerweise Abelsche topologische Gruppe. Dann ist die Zusammenhangskomponente von 1 eine abgeschlossene Untergruppe von G.

2. Ist G eine topologische Gruppe und G_1 die Zusammenhangskomponente der 1. Dann ist G/G_1 total unzusammenhängend.

3. Ist G eine topologische Gruppe mit Untergruppe H. Ist G zusammenhängend, so ist G/H zusammenhängend. Sind H und G/H zusammenhängend, so ist G zusammenhängend.

4. Sind H und G/H lokalkompakt, so ist G lokalkompakt.

5. Eine Abbildung heisst abgeschlossen, wenn das Bild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ offen aber nicht abgeschlossen ist.

6. Für einen lokalkompakten topologischen Raum X und eine topologische Gruppe G wird der Raum $C_c(X, G)$ der stetigen Funktionen von X nach G versehen mit der kompakt-offenen Topologie und der Gruppenmultiplikation $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$ zu einer toplogischen Gruppe.

7. Jede (nicht notwendigerweise Hausdorff'sche) topologische Gruppe ist ist T_3 und $T_{3,5}$.

8. Für $1 < p \in \mathbb{N}$ wird durch die Abbildungen φ_p, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $t + \mathbb{Z} \mapsto pt + \mathbb{Z}$ eine Folge von Abbildungen $\mathbb{T} \leftarrow \mathbb{T} \leftarrow \mathbb{T} \cdots$ definiert. Definieren Sie Abbildugnen $d_{i,j}$, $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ mit $d_{i,i+1} = \varphi_p$ und zeigen Sie dass der projektive Limes dieses Systems existiert und eine topologische Gruppe $\mathbb{T}_p$ definiert (p-adisches Solenoid).

9. Die topologische Gruppe $\mathbb{T}_p$ von Bsp. 8 ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend mit Wegzusammenhangskomponente der 0 gleich

$$\{(p^{-n}r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} : r \in \mathbb{R}\}.$$