Übungen zu Topologie 4. Übung 3. 12. 2014

Zeigen Sie:

1. Für eine topologische Hausdorff-Gruppe G mit Untergruppe H ist G/H genau dann Hausdorff, wenn H abgeschlossen ist.

2. Ist die Untergruppe H einer Hausdorffgruppe G kommutativ, so ist auch $\bar{H}$ kommutativ. Gilt diese Aussage auch für topologische Gruppen G die nicht Hausdorff sind?

3. Ist der Morphismus $\varphi : \ A \to B$, $A, B \in LCA$ surjektiv, so ist $\widehat{\varphi}$ injektiv. Sind A, B kompakt und ist $\widehat{\varphi}$ injektiv, so ist φ surjektiv.

4. Sei $A := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie versehen. Dann wird A durch die Multiplikation $(a, b) \cdot (x, y) = (ax, ay + b)$ zu einer nichtkommutativen topologischen Gruppe.

5. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ auf einer topologischen Gruppe G heißt links-gleichmäßig stetig, wenn es für $\epsilon > 0$ eine 0-Umgebung U gibt, sodass $|f(x) - f(xs)| < \epsilon$ für $s \in U$ und $x \in G$ gilt. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ auf einer topologischen Gruppe G heißt rechts-gleichmäßig stetig, wenn es für $\epsilon > 0$ eine 0-Umgebung U gibt, sodass $|f(x) - f(sx)| < \epsilon$ für $s \in U$ und $x \in G$ gilt. Zeigen Sie dass es auf der Gruppe A aus Bsp. 4 links-gleichmäßig stetige Funktionen gibt, die nicht rechts-gleichmäßig stetig sind.

6. Ist D eine diskrete Untergruppe der LCA-Gruppe A, so ist für jede kompakte Menge $K \subseteq A$ die Menge $K \cap D$ endlich.

7. Ein Morphismus $\mathbb{R} \to A$, $A \in LCA$ ist entweder ein Isomorphismus $\mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ oder $\varphi(\mathbb{R})$ ist relativ kompakt in A.

8. Ein Charakter χ einer Abelschen topologischen Gruppe ist positiv definit, d.h. für jede endliche Teilmenge E von G gilt
$$\sum_{x,y \in E} \chi(x - y) \geq 0.$$

9. Eine G_δ-Menge in einem kompakten Hausdorffraum ist von 2. Kategorie.