Übungen zu Topologie 5. Übung 17. 12. 2014

Zeigen Sie:

1. Eine LCA-Gruppe A ist genau dann zusammenhängend wenn $\hat{A}$ keine kompakte Untergruppe enthält.

2. Für eine LCA-Gruppe sei der Morphismus $\underline{n}_A$ durch $\underline{n}_A(a) := na$ gegeben. Dann gilt $\widehat{\underline{n}_A} = \underline{n}_{\hat{A}}$.

   Eine LCA-Gruppe A heißt *teilbar* wenn es für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ ein $b \in A$ mit $nb = a$ gibt und *torsionsfrei*, wenn $na \neq 0$ für $a \in A \setminus \{0\}$ und $n \geq 1$.

3. Ist A teilbar, so ist $\hat{A}$ torsionsfrei. Ist A kompakt und teilbar, so ist $\hat{A}$ diskret und torsionsfrei. Ist A diskret und teilbar, so ist $\hat{A}$ kompakt und torsionsfrei.

4. Für eine Teilmenge A einer LCA-Gruppe G gilt $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle \iota_A(A) \rangle}$ wobei $\langle B \rangle$ die von B erzeugte Untergruppe von $\hat{\hat{G}}$ bezeichnet.

5. Sei A eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{T}^n$. Dann ist A isomorph zu $\mathbb{T}^m \times Z$ mit $m \leq n$ und F eine endliche Abelsche Gruppe.

6. Eine Abelsche Gruppe ist genau dann endlich erzeugt, wenn ihre duale Gruppe $\hat{A}$ in einen Torus $\mathbb{T}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ eingebettet werden kann.

7. Ist A aus LCA mit A_0 Zusammenhangskomponente der 0 und Γ eine kompakte Untergruppe von $\hat{A}$. Dann gilt $\Gamma \subseteq A_0^\perp$.

8. Ist K eine kompakte Untergruppe der LCA-Gruppe A, so ist jede zusammenhängende Untergruppe von $\hat{A}$ aus $K^\perp$.

9. Sei A eine LCA-Gruppe mit dualer Gruppe $\hat{A}$. Mit $\hat{A}_d$ bezeichnen wir $\hat{A}$ versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist $bA := \widehat{\hat{A}_d}$ die *Bohrkompaktifizierung* von A. A kann kanonisch als (algebraische) Untergruppe von bA aufgefasst werden und $C(bA)$ ist der Abschluss von $\mathrm{Span}(\hat{A})$ bezüglich der Supremumsnorm auf bA.