Übungen zu Topologie 6. Übung 14. 1. 2014

Zeigen Sie:

1. $\beta\mathbb{N}$ ist separabel (d.h. hat eine abzählbare dichte Teilmenge) aber $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ist nicht separabel.

2. Für $n \in \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$ ist die Abbildung $\beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} : p \mapsto p+n$ stetig und es gilt $p+n = n+p$.

3. Für jeden Ultrafilter $p \in \beta\mathbb{N}$ und jede Funktion $f : \mathbb{N} \to K$, K kompakt konvergiert der von $(f(A))_{A\in p}$ erzeugte Filter. Wir bezeichnen diesen Grenzert mit $p - \lim_n f(n)$. Dann gilt wenn wir die stetige Fortsetzung von f auf $\beta\mathbb{N}$ ebenfalls mit f bezeichnen:

$$f(p+q) = q - \lim_m (p - \lim_n f(m+n)).$$

   Für einen kompakten Hausdorffraum (X, τ) mit einer stetigen Abbildung $T : X \to X$ heißt das Tripel (X, τ, T) ein dynamisches System. Ist keine Unklarheit denkbar, so schreiben wir auch kurz X für das dynamische System.

4. Der Orbit eines Elementes $x \in X$ ist die Menge $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Der Orbitabschluss d.h. der Abschluss des Orbits von x ist $f_x(\beta\mathbb{N})$ wenn f_x die stetige Fortsetzung der Abbildung $\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}, n \mapsto T^n x$ auf $\beta\mathbb{N}$ bezeichnet.

5. Sei (X, τ, T) ein dynamisches System, dann heißt ein $x \in X$ *wiederkehrend* wenn für jede Umgebung U von x die Menge $\{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\}$ unendlich ist. Sei für $x \in X$ die Funktion $f_x : \mathbb{N} \to X$ durch $f_x(n) = T^n(x)$ definiert.

   $x \in X$ ist genau dann wiederkehrend, wenn es ein $p \in \beta\mathbb{N}$ mit $f_x(p) = x$ gibt. (f_x bezeichnet hier wieder die stetige Fortsetzung von f_x auf $\beta\mathbb{N}$).

6. Sei (X, τ, T) ein dynamisches System, dann heißt ein $x \in X$ *gleichmäßig wiederkehrend* wenn es für jede Umgebung U von x ein N gibt sodass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt $\{T^n(x) : l \leq n < l + N\} \cap U \neq \emptyset$. $x \in X$ hat *minimalen Orbitabschluss*, wenn $\overline{\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}}$ eine minimale T-invariante Teilmenge von X ist.

   $x \in X$ ist genau dann gleichmäßig wiederkehrend, wenn x minimalen Orbitabschluss hat.

7. Sei für $x \in X$ die Funktion $f_x : \mathbb{N} \to X$ durch $f_x(n) = T^n(x)$ definiert. $x \in X$ ist genau dann gleichmäßig wiederkehrend, wenn es für alle $p \in \beta\mathbb{N}$ ein $q \in \beta\mathbb{N}$ mit $f_x(p+q) = x$ gibt.

   (Hinw.: Zeigen Sie $f_x(p+q) = q - \lim_m (T^n p - \lim_n f_x(n)) = f_{f_x(p)}(q)$).

8. Das System aller Teilmengen A von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} |\{k \in \mathbb{N} :\ k \leq n\} \cap A|/n = 1$$

("A hat Dichte 1") bildet eine Filterbasis. Jeder Ultrafilter der diese Filterbasis enthält enthält keine Menge $B \subset \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} |\{k \in \mathbb{N} :\ k \leq n\} \cap B|/n = 0$$

("enthält keine Menge der Dichte 0"). Sei S die Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$ die durch $p \in S$ genau wenn p keine Menge der Dichte 0 enthält definiert ist. Dann ist S eine abgeschlossene Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$ mit $p \in S$, $q \in \beta\mathbb{N} \Rightarrow p + q \in S$ (S ist ein Rechtsideal). $|M|$ bezeichnet die Mächtigkeit der Menge M.

9. Die stetige Fortsetzung T der Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N};\ n \mapsto n + 1$ auf $\beta\mathbb{N}$ definiert ein dynamisches System auf $\beta\mathbb{N}$. Dieses induziert ein dynamisches System auf $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und T ist ein Homöomorphismus auf $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.