1. Geben Sie bei den folgenden Differentialgleichungen die Ordnung an und entscheiden Sie, ob sie linear (oder nichtlinear) sind.

a) $y'(t) + y(t)\sin(t) = 1\,,$

b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0\,,$

c) $y''(t) = t\sin(y(t))\,,$

d) $\boldsymbol{y}'(t) + \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)\,,$

wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f} \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^{2\times 2})$.

2. Zeigen Sie, dass $u(x,t) := \sin(x \pm ct)$ und allgemeiner $u(x,t) := w(x \pm ct)$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

sind. Was ist die Bedeutung von $c \in \mathbb{R}$ und in welche Richtung bewegen sich diese Wellen? Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ die Ortsvariable und $t \in \mathbb{R}$ die Zeit.

3. Formulieren Sie die Differentialgleichungen

a) $y''(x) - \sin(x)\,(y'(x))^2 y(x) = \cosh(x) - (y(x))^2\,,$

b) $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 2e^{3x}$

jeweils als ein System 1. Ordnung.

4. Jede der Funktionen $\sin(x - 2t)$, $2\cos 3x + 5\sin 3x$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ und $\frac{x}{t}$ löst eine der folgenden DGLs. Welche? Überlegen Sie sich zu den entsprechenden DGLs auch den Typ, also ob sie linear oder nichtlinear, gewöhnlich oder partiell sind und welche Ordnung sie haben.

a) $x^2\frac{d^3y}{dx^3} - 5x\frac{dy}{dx} + 7y = 0$

b) $\dot{y} + t^3 y = e^{-t}$

c) $\dot{y} + t y^3 = e^{-t}$

d) $y'' + 9y = 0$

e) $\ddot{x} + \sin x = 0$

f) $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$

g) $u_t + 2u_x = 0$

h) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

i) $u_t + u u_x = 0$

j) $u_t + u u_x = u_{xxx}$

5. Eine Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t))\,,$$

bei der die rechte Seite nicht explizit von t abhängt, heißt *autonom*.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung einer autonomen Differentialgleichung translationsinvariant ist, dh. mit x ist auch $u(t) = x(t+a)$ mit $a, t \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

(b) Wählen Sie $f(x) = x(x-1)$ und lösen Sie die Differentialgleichung, indem Sie alle Terme, in denen x vorkommt auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren, also durch *Separation der Variablen*. Skizzieren Sie die Lösungen. Auf welchem Intervall existieren die Lösungen?

6. Sei $\epsilon > 0$. Betrachten Sie die „skalierte" Lotka-Volterra-Gleichung

$$x'(t) = x(t) - x(t)y(t),$$
$$y'(t) = -\epsilon y(t) + x(t)y(t).$$

Zeigen Sie: Die Funktion $(x,y) \to \Phi(x,y) := x + y - \epsilon\ln x - \ln y$ ist eine Erhaltungsgröße, d.h. für Lösungen $t \to (x(t), y(t))$ der Lotka-Volterra-Gleichung gilt, dass $t \to \Phi(x(t), y(t))$ konstant ist.

7. Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y'(x) = -2x\,(y(x))^2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Bestimmen Sie das Richtungsfeld dieser Gleichung.

Verifizieren Sie, dass die Lösung dieser Differentialgleichung $y(x) = \frac{1}{x^2+C}\,,\ C \in \mathbb{R}$ ist.

Bestimmen Sie die Lösung durch den Punkt $(1, \frac{1}{2})$.

Gibt es eine Lösung durch den Punkt $(1, 0)$?

8. Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(x))$ mit $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Phasenporträts und bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung:

a) $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (2, 3)\,,$

b) $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (1, y_1)\,,$

c) $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (1, y_2)\,,$

d) $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\,,$

e) $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (y_1, -y_2)\,.$

Hinweis: Als Phasenporträt wird die Gesamtheit aller Integralkurven bezeichnet.