1. Bestimmen Sie die Eigenwerte des zweidimensionalen Laplaceoperators auf dem Rechteck $D = [0, a]\times[0, b]$ mit den (Dirichlet-)Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(a, y) = 0, \qquad && y \in [0, b], \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0, \qquad && x \in [0, a], \end{aligned}$$

d.h. bestimmen Sie die Werte von λ, für die das Randwertproblems

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u$$

eine nichttriviale Lösung hat. Machen Sie dazu einen Separationsansatz

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

der auf Eigenwertprobleme für φ und ψ führt.

Hinweis: Es muss nicht gezeigt werden, dass man dadurch tatsächlich alle Eigenwerte erhält. Dies folgt aus der Vollständigkeit des mittels Separation erhaltenen Systems von Eigenfunktionen.

2. Gegeben ist die Wellengleichung mit Randbedingungen

$$u_{tt} = u_{xx}, \;\; u(0, t) = u(1, t) = 0\,, \;\; x \in [0, 1]\,, \, t \in \mathbb{R}\,.$$

Führen Sie einen Separationsansatz durch, d.h. bestimmen Sie alle Lösungen der Form $u(x, t) = w(t)v(x)$. Bestimmen Sie damit die Lösung der Wellengleichung, die zusätzlich zu den Randbedingungen auch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = g(x), \;\; u_t(x, 0) = h(x)\,, \;\; x \in [0, 1]$$

mit geeigneten Funktion g, h erfüllt. Entwickeln Sie dazu die Lösung in eine Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Die Konvergenz der auftretenden Reihe muss nicht untersucht werden.

3. a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

durch die Substitution

$$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p\,dx} u(x)$$

in die Form

$$v'' + k(x)v = 0$$

gebracht werden kann. Geben Sie die Funktion k explizit an.

b) Wie wirkt sich diese Tranformation auf das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ aus?

c) Transformieren Sie die Hermitesche Differentialgleichung

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,, \;\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Eigenwertproblems

$$-(xu')' = \frac{\lambda}{x}u, \qquad u(1) = 0,\ u(\mathrm{e}) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass alle Eigenwerte positiv sind und man daher $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ setzen kann. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit u und integrieren Sie über das Intervall $[1, \mathrm{e}]$. Es handelt sich hier um eine Eulersche Differentialgleichung. Machen Sie daher einen Ansatz $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

5. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu :=& -(pu')' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ R_1u :=& \alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a)u'(a) = r_1, \\ R_2u :=& \alpha_2 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) = r_2, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen p und q hinreichend glatt sind, $p > 0$ auf $[a,b]$ und $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0)$ für $i = 1,2$. Nehmen Sie an, dass das Randwertproblem für $f = 0 = r_1 = r_2$ nur trivial lösbar ist. Sind weiters y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Lu = 0$ mit $R_1u_1 = 0$ und $R_2u_2 = 0$. Dann gilt:

$$\kappa(x) := p(x)(u_1'u_2 - u_1u_2') = c, \quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$$

$$G(x,s) = \frac{1}{\kappa}\begin{cases} u_1(s)u_2(x) & a \le s \le x \\ u_1(x)u_2(s) & a \le x \le s \end{cases}$$

6. Betrachten Sie die Schwingung einer einseitig eingespannten Saite, welche die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

erfüllt. Die Anfangsbedingungen seien $u(\cdot,0) = u_0(\cdot)$ und $\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,0) = u_1(\cdot)$. Formulieren und lösen Sie das Eigenwertproblem, welches durch einen geeigneten Separationsansatz entsteht. Geben Sie eine (formale) Lösung als Reihe an.

7. Gegeben ist das Randwertproblem

$$Lu := -(xu')' = f(x), \qquad u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems

c) Zeigen Sie, dass das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ nur reelle und positive Eigenwerte besitzt.

8. Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$Lu = u'' + \lambda u = 0$$

mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$ und $u(l) = 0$, $l > 0$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem handelt.

b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte positiv sind, indem Sie die Gleichung $\lambda u = -u''$ mit y multiplizieren und partiell integrieren.

c) Bestimmen Sie die die Eigenfunktionen u_k.

Bemerkung: Beispiel 8 ist ein ehemaliges Prüfungsbeispiel!