1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DG

$$x' = x^2 + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2}, \qquad t \in (0, \infty).$$

Hinweis: Eine Lösung dieser DG lässt sich in der Form $x(t) = a/t$ mit einem geeigneten $a \in \mathbb{R}$ schreiben.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x'(t) + \cos t \, x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \, .$$

3. Die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$x' = -ax + bx^{\gamma}$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $\gamma \neq 1$ ist separabel. Lösen Sie diese Differentialgleichung mittels der Methode der Separation der Variablen.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Substitution um die notwendige Integration durchzuführen.

4. *Homogene* ODEs der Form $x' = f(x/t)$ können mit der Substitution $x/t = y$ vereinfacht werden. Geben Sie die allgemeine Lösung an für

$$x' = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + 2\frac{x}{t} \qquad \text{und} \qquad x' = \frac{x}{t} + \tan\frac{x}{t}.$$

5. Lösen Sie die DGL

$$2xydx + (x^2 + 3y^2 - 1)dy = 0$$

als exakte DGLs oder mit Hilfe eines geeigneten integrierenden Faktors. Skizzieren Sie die Integralkurven als Niveaulinien der Stammfunktion $F(x, y)$.

Hinweis: Untersuchen und zeichnen Sie zuerst die Niveaulinie $F(x, y) = 0$.

6. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die ODE vom *Eulerschen Typ*:

$$2t^3 y^{(3)} + 10t^2 y^{(2)} - 4ty' - 20y = 0.$$

Hinweis: Substituieren Sie $t = e^{\tau}$.

7. Berechnen Sie alle möglichen Lösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = 2t\sqrt{x}$$

mittels Separation der Variablen. Geben Sie auch die konkreten Lösungen zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $x(0) = 0$ und $x(0) = -1$. Was passiert im letzten Fall?

8. Skizzieren Sie für die angegebenen (inhomogenen) DGLs das Richtungsfeld. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL, berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL.
Lösen Sie das AWP $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen für $t \to \pm\infty$. Stellen Sie einige typische Lösungskurven in einer Skizze dar. Welche dieser DGLs hat Lösungen, die

i) für $t \in \mathbb{R}$ existieren?
ii) für $t \in \mathbb{R}$ existieren und beschränkt sind?
iii) periodisch sind?

a) $x' = -2x + 3$
b) $x' = 2x + \cos 3t$
c) $x' = -\frac{x}{t} + 1$