**1.** Berechnen Sie jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen

a) $y''(t) = -y(t)$, b) $y''(t) = y(t)$, c) $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

**2.** Finden Sie einen integrierenden Faktor für die nicht exakte Differentialgleichung

$$(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$$

und lösen Sie die DG.

**3.** Berechnen Sie die Lösung (in impliziter Form) der Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2} .$$

**4.** Die logistische Gleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)(K - x(t)) = \lambda K x(t) - \lambda x^2(t)$$

ist eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 2$ und $K$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Interpretieren Sie das Modell und lösen Sie die logistische Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Geben Sie das Richtungsfeld für die DG an und zeichnen Sie die Intgralkurve ein.

**5.** Betrachten Sie die Funktion $f$ definiert durch

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & t > 0 \text{ und } x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & t > 0 \text{ und } 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & t > 0 \text{ und } t^2 < x \end{cases}$$

Ist $f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$? Ist sie lokal Lipschitzstetig im 2. Argument?

**6.** Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ein Gebiet. Zeigen Sie: Eine Funktion $f \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$ ist lokal Lipschitzstetig im 2. Argument. Geben Sie eine stetige Funktion $f$ an, die nicht Lipschitzstetig im 2. Argument ist.

**7.** Sei $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^d$ stetig. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) Für jedes $(t, z) \in G$ existiert eine Umgebung $U$ und ein $L_U > 0$ so, dass $\|f(\tilde{t}, x) - f(\tilde{t}, y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_U \|x - y\|_{\mathbb{R}^d}$ für alle $(\tilde{t}, x), (\tilde{t}, y) \in U$.

(b) Für jede kompakte Menge $K \subset G$ existiert ein $L_K > 0$ so, dass $\|f(\tilde{t}, x) - f(\tilde{t}, y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq L_K \|x - y\|_{\mathbb{R}^d}$ für alle $(\tilde{t}, x), (\tilde{t}, y) \in K$.

**8.** Gegeben ist ein Intervall $I$ und eine stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die bezüglich ihres zweiten Arguments Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $L$.

Zeigen Sie: Sind zwei Lösungen $x_j$ , $j = 1, 2$ der Differentialgleichung $x_j'(t) = f(t, x_j(t))$ , $t \in I$ , gegeben, so gilt für alle $t > t_0 \in I$ die Abschätzung

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \, e^{L|t - t_0|} .$$