**1.** Führen Sie vier Schritte der Picarditeration für das AWP $x' = x^2$, $x(0) = 1$ aus. Dies legt nahe, dass gilt

$$x_k(t) = 1 + t + t^2 + \cdots t^k + O(t^{k+1}).$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der exakten Lösung $x(t)$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ könnte man $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$ erwarten? Geben Sie ein $\delta > 0$ an, sodass die Picarditeration auf $[-\delta, \delta]$ gegen die exakte Lösung konvergiert.

**2.** Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung haben und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall:

a) $x' = \sin(x^2 + t)\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$
b) $x' = (x^2 + t)\sin x\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$
c) $x' = \frac{t}{x}\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,\ x_0 \neq 0\,.$

**3.** Zeigen Sie:

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt. Falls $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz bezüglich $x$ ist, so ist $f$ Lipschitz bezüglich $x$.

**Hinweis:** Führen Sie den Beweis indirekt. Angenommen $f(t, x)$ ist auf $G$ nicht Lipschitz bezüglich $x$. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ Punkte $(t_n, x_n)$, $(t_n, y_n) \in G$ existieren mit

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n) > n|x_n - y_n|.$$

Benützen Sie die Kompaktheit von $G$, um daraus einen Widerspruch zur lokalen Lipschitz-Eigenschaft herzuleiten.

**4.** Sei $I$ ein abgeschlossenes (endliches) Intervall, $L \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Raum $C(I; \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf $I$ mit der Norm

$$\|z\|_X := \max_{t\in I} e^{-2Lt}\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

ein Banachraum ist. (Sie dürfen verwenden, dass der Raum $C(I; \mathbb{R}^n)$ mit der „üblichen“Norm ein Banachraum ist). Geben Sie einen Teilraum von $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ (und eine Norm) an, sodass ein Banachraum entsteht.

**5.** Beweisen Sie die folgende allgemeine Version des **Lemmas von Gronwall:**

Seien $u$ und $\delta\,, L : I = [t_0, t_1] \to [0, \infty]$ stetige Funktionen. Falls

$$u(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} L(x)u(x)\,dx\,, \quad \forall t \in I\,,$$

dann gilt

$$u(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} \delta(x)L(x)e^{\int_x^t L(u)\,du}\,dx\,, \quad \forall t \in I\,.$$

**Hinweis:** Setzen Sie $y(t) := \int_{t_0}^t L(x)u(x)(x)dx$ und zeigen Sie $y' \leq Ly + L\delta$. Setzen Sie dann $z(t) := y(t)e^{-\int_{t_0}^t L(x)dx}$ und leiten Sie eine Differential-Ungleichung für $z(t)$ her.

**6.** Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = t^2(1 - (x(t))^2) = f(t, x(t))\,, \quad t \in [1, 3]$$
$$x(2) = 1\,.$$

Wählen Sie die Menge $G$ im Satz von Picard–Lindelöf als $G = [1, 3] \times B_1(1)$ und geben Sie eine Lipschitz–Konstante der Funktion $f(t, x(t))$ bezüglich dem 2. Argument an.

Für welches Intervall garantiert der Satz von Picard–Lindelöf die Existenz der Lösung?

**7.** Für $(t,x)$ aus dem Rechteck $\{(t,x) : |t| < 10\,, |x-1| < c\}$ ist die Funktion $f$ definiert durch $f(t,x) = 1 + x^2\,.$

(a) Geben Sie mit dem Satz von Picard–Lindelöf ein Intervall $[-\delta,\delta]$ an, auf dem das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t,x(t))\,, \quad x(0) = 1\,,$$

genau eine Lösung auf $(-\delta,\delta)$ besitzt.

(b) Wie muss die Menge $G$ gewählt werden, damit die Intervalllänge $2\delta$ aus a) größtmöglich wird?

(c) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (durch Separation), also indem Sie alle Terme, in denen $x$ vorkommt, auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Auf welchem Intervall existiert die Lösung?

**8.** Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y''(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

eine eindeutige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.