1. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie: Falls $o \in C^1(J, \mathbb{R})$ eine Oberlösung und $x \in C^1(J; R)$ eine Lösung der ODE $x' = f(t, x)$ ist, dann gilt: $x(t_0) < o(t_0) \Rightarrow x(t) < o(t) \quad \forall t \in (t_0, b)$.

2. Betrachten Sie das lineare System $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie ein Fundamentalsystem an.

Hinweis: Eine Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x_1(t) = x_2(t)$ und eine weitere kann mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert berechnet werden.

3. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x'(t) = A(t)x(t)$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn es eine reguläre Matrx $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $X(t) = Y(t)\,B$ für alle $x \in I$.

b) Die Matrix $X(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}$ ist eine Hauptfundamentalmatrix bezüglich t_0.

4. Sei $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

a) Zeigen Sie die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(XY) = \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right).$$

b) Falls $X(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $t \mapsto (X(t))^{-1}$ in $C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Geben Sie $(X^{-1})'$ an.

c) Sei Y eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x' = A(t)x$. Welche Differentialgleichung wird von Y^{-1} erfüllt?

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLs und skizzieren Sie die Integralkurven.

a) $x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$

b) $x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$

Hinweis: Benützen Sie im Fall einer diagonalisierbaren Matrix die Methoden aus der Vorlesung. Falls die Matrix nicht diagonalisierbar ist, lösen sie die DGL direkt.

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie: Ist $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ ein Eigenpaar von A, so sind die Funktionen $x_1(t) = e^{\lambda t}v$ und $x_2(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$ Lösungen der ODE $x' = Ax$.

b) Nehmen Sie an, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (komplex) diagonalisierbar ist. Geben Sie ein *reelles* Fundamentalsystem der ODE $x' = Ax$ an.

7. Gegeben ist das System von Differentialgleichnungen $x' = Ax + b$, mit einer konstanten $n \times n$-Matrix A und einer konstanten Inhomogenität b. Zeigen Sie, dass im Fall einer regulären Matrix A immer eine konstante Partikulärlösung existiert. Welche Bedingung an b garantiert im Fall einer singulären Matrix A die Existenz einer konstanten Partikulärlösung?

8. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-t}\begin{pmatrix} 2t \\ \frac{t+1}{t} \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\,.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix $Y(t)$.

b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante von $Y(t)$ und verifizieren Sie die Aussage des Satzes von Liouville.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

d) Lösen Sie das AWP $x(2) = (1, 0)^T$.