1. Geben Sie für die lineare Differentialgleichung $x'(t) = A_i x(t),\ i = 1, 2, 3, 4$ mit den folgenden zweidimensionalen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils eine Fundamentalmatrix an und zeichnen Sie jeweils auch die Phasenporträts.

2. Welche der folgenden Funktionen

a) $\boldsymbol{x}(t) = (3e^t + e^{-t}, e^{2t})$
b) $\boldsymbol{x}(t) = (3e^t + e^{-t}, e^t)$
c) $\boldsymbol{x}(t) = (3e^t + e^{-t}, te^t)$
d) $\boldsymbol{x}(t) = (e^t + 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$
e) $\boldsymbol{x}(t) = (3e^t, t^2e^t)$

kann eine Lösung einer Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sein?

3. Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:

a) $\det e^A = e^{spur\,A}$
b) $e^{A^T} = (e^A)^T$
c) e^{At} ist orthogonal und $\det e^{At} = 1$, falls $A^T = -A$ (d.h. A ist schiefsymmetrisch).
d) $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$, falls $AB = BA$.

4. Es sei $A(t)$ eine auf einem Intervall I stetige $n \times n$ Matrixfunktion. Es sei $x(t)$ eine Lösung der DG $x' = A(t)x$ und $y(t)$ Lösung der DG $y' = -A^T(t)y$, wobei A^T die Transponierte von A ist.

a) Zeigen Sie, dass dann gilt $x(t) \cdot y(t) = konst.$
b) Die Matrixfunktion $A(t)$ sei zusätzlich schiefsymmetrisch, d.h. $A(t)^T = -A(t)$ für $t \in I$.
Zeigen Sie, dass dann gilt $|x(t)| = konst.$

5. Definieren Sie die matrixwertige Funktion $Z(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$ (hier ist $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$).

Zeigen Sie: Man kann nicht erwarten, dass Z eine Fundamentalmatrix für $x' = A(t)x$ ist. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Z eine Fundamentalmatrix ist.

6. Lösen Sie das AWP

$$x' = \begin{pmatrix} 1/t & -1/t^2 \\ 2 & -1/t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. a) Betrachten Sie den allgemeinen harmonischen Oszillator mit Reibung, aber ohne äußere Anregung $y'' + 2by' + cy = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Geben Sie in Abhängigkeit von b, c jeweils ein Fundamentalsystem an.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y''' - 3y' + 2y = 0$ und suchen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y''' - 3y' + 2y = 9e^t$ auf zwei Arten:
(i) mittels Variation der Konstanten und (ii) mittels der Ansatzmethode.

8. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \cos t$$

mit $y(0) = y'(0) = 1.1$ als Anfangsbedingungen. Wählen Sie für die Partikulärlösung den Ansatz

$$y_p(t) = d\cos(t + \delta), \quad d, \delta \in \mathbb{R}.$$