1. Das folgende Lotka-Voltera Modell beschreibt das zeitliche Verhalten zweier Tierarten x und y

$$x' = 3\,x\,(2 - x + y)\,,$$
$$y' = y\,(3 + x - 3y)\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems.

b) Untersuchen Sie die Stabilität und den Typ der Gleichgewichtspunkte mittels Linearisierung.

c) Zeichen Sie ein plausibles Phasenporträt im 1. Quadranten ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

d) Interpretieren Sie das Phasenporträt in Hinblick auf das Verhalten der beiden Populationen für $t \to \infty$.

2. Das folgende Beispiel zeigt, dass man im Fall nichtautonomer linearer Differentialgleichungen $x' = A(t)x$ von den Eigenwerten der Matrix A nicht auf die Stabilität der Ruhelage $\bar{x} = 0$ schließen kann. Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t\,\cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t\,\cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$ von $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ haben negativen Realteil.

b) $x(t) = e^{\frac{t}{2}}(-\cos t\,, \sin t)^T$ ist eine Lösung der Differentialgleichung.

c) Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist instabil.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = -x^2\,\sin t$.

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, für welche $t \geq 0$ die Lösung existiert.

d) Ist die Lösung $x(t) = 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil?

4. Skizzieren Sie für die skalare Differentialgleichung $x' = x - \sin t$ die Isoklinen und das Richtungsfeld. Zeichnen Sie außerdem die Lösungskurven durch $(\frac{\pi}{2}, 1)$ bzw. $(\frac{\pi}{2}, -1)$. Welche Aussagen hinsichtlich Beschränktheit der beiden Lösungskurven für $t \geq \frac{\pi}{2}$ bzw. $t \leq \frac{\pi}{2}$ lassen sich analytisch begründen?

5. Untersuchen Sie die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Ruhelage der folgenden DGLs.

a) $x' = (x + 1)(x - 1)^2(x - 3)$, b) $x' = (\sin t)x$, c) $x' = (\sin t - 0.1)x$,

Mögliche Methoden sind: Heuristik, Lösen der DGL, Richtungsfeld, Ober- und Unterlösungen, Linearisieren.

6. Untersuchen Sie, ob für die folgenden DG die Lösung $x(t) = 0$, $t \geq 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist? Untersuchen Sie auch, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x(0) = a$ auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt ist.

a) $x' = -tx + x^3$ b) $x' = \frac{x^2}{1+t^2}$

7. Schreiben Sie die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + by' + ky = 0$$

als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

a) Klassifizieren und skizzieren Sie für $k = 0, 1, -1$ die auftretenden Phasenporträts, wenn b ganz $\mathbb{R}$ durchläuft.

b) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn (k, b) die Gerade $k = -b$ durchläuft.

c) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn (k, b) den Kreis $k^2 + b^2 = 1$ durchläuft.

Überlegen und benützen Sie dazu eine Klassifikation ebener linearer Systeme in der Spur-Determinante Ebene. Wo treten jeweils Änderungen (Verzweigungen) im Stabilitätsverhalten bzw. im Phasenporträt auf?

8. Betrachten Sie das skalare autonome System $x' = f(x)$, welches die Ruhelage x_0 habe. Zeigen Sie:

a) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ und $f(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, dann ist $x \equiv x_0$ asymptotisch stabil.

b) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ und $f(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, dann ist $x \equiv x_0$ instabil.