1. Betrachten Sie das zweidimensionale System von Differentialgleichungen

$$x' = -y + ax(x^2+y^2)\,, \qquad y' = x + ay(x^2+y^2)\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

und zeigen Sie

a) Der Ursprung ist für die Linearisierung ein Zentrum.

b) Für die nichtlineare Differentialgleichung ist der Ursprung für $a < 0$ stabil und für $a > 0$ instabil.

c) Zeichnen Sie das Phasenporträt für $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

2. Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung des mathematischen Pendels
$y'' + ry' + \sin y = 0$ mit Reibungskoeffizient $r \in \mathbb{R}\,,\ r \geq 0\,.$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System 1. Ordnung.

b) Bestimmmen Sie die Gleichgewichtspunkte dieses Systems 1. Ordnung.

c) Bestimmen Sie die Linearisierung an den Gleichgewichtspunkten und klassifizieren Sie in Abhängigkeit von $r \geq 0$ den Typ der Gleichgewichtspunkte der Linearisierung.

d) Was kann man über die Stabilität der Gleichgewichtspunkte für die nichtlineare Differentialgleichung aussagen?

e) Skizzieren Sie ein plausibles Phasenporträt für kleine positive Werte von r.

3. Betrachten Sie für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ das System

$$x' = y, \qquad y' = -x + y(4 - x^2 - 4y^2).$$

Definieren Sie die Hilfsfunktion $H(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

a) Zeigen Sie: Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} \leq H(x, y) \leq 2\}$ ist eine invariante Menge.

b) Zeigen Sie: M enthält keine Ruhelagen. Schließen Sie auf die Existenz eines periodischen Orbits in M.

4. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$x' = -x - 2y + x^2y^2\,, \qquad y' = x - \frac{1}{2}y - x^3y\,.$$

Konstruieren Sie eine Ljapunovfunktion V von der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$. Was können Sie über die Stabilität des Gleichgewichtspunktes $(0, 0)$ aussagen?

5. Ziel dieser Aufgabe ist eine Beziehung zwischen der linearisierten Stabilität und dem Konzept der Ljapunovfunktion.

Genauer: wir zeigen die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ der ODE $x' = Ax$ ist asymptotisch stabil.
2. Es gibt eine symmetrisch positiv definite Lösung der Matrixgleichung („*Ljapunovgleichung*")

$$A^\top Q + QA = -I. \tag{1}$$

a) Sei die Ruhelage $\bar{x} = 0$ asymptotisch stabil. Definieren Sie die Matrix

$$Q := \int_{t=0}^{\infty} e^{tA^\top} e^{tA} dt.$$

Zeigen Sie: $\boldsymbol{Q}$ ist symmetrisch positiv definit (insbesondere also $(Qx, x)_2 > 0$ für $x \neq 0$) und erfüllt (1). Wie Teilaufgabe b) zeigen wird, ist die Funktion $V(x) := (Qx, x)_2$ eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE.

b) Sei Q eine symmetrisch positiv definite Lösung von (1). Zeigen Sie: $V(x) := (Qx, x)_2$ ist eine strikte Ljapunovfunktion für die obige ODE. Zeigen Sie: die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist asymptotisch stabil.

6. Bestimmen Sie die stabile und instabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage $\bar{x} = 0$ des Differentialgleichungssystem

$$x_1' = -x_1\,, \qquad x_2' = -x_2 + x_1^2\,, \qquad x_3' = x_3 + x_1^2\,.$$

7. Betrachten Sie das folgende Modell für die Bildung von Schwärmen[1] (zb. bei Vögel), gegeben durch das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t),\ t > 0, \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} r(|x_i(t) - x_j(t)|)(v_j(t) - v_i(t)), \quad t > 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

mit $i = 1, \dots, N$, $\lambda > 0$ und $x_i, v_i \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet x_i, v_i die Position und Geschwindigkeit des i-ten Vogel zum Zeitpunkt t, und die Interaktionsfunktion $r \in Lip(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ (Menge aller Lipschitz stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$) sei gegeben durch die monoton fallende Funktion

$$r(s) := \frac{A}{(1+s^2)^\beta},$$

mit $A, \beta > 0$.

(a) Interpretieren Sie die verschiedenen Terme in der Gleichung. Wie verändert sich das Langzeitverhalten der Vögel für verschiedene $\beta \in [0, 1]$? Sie können dazu das Matlab-File `solve_cs.m` zur Veranschaulichungen der Lösungen verwenden.

(b) Zeigen Sie die Existenz von eindeutigen globalen Lösungen ($t > 0$) des Anfangswertproblems gegeben durch die Gleichungen (2), $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{dN}$ und $v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^{dN}$.

(c) Finden Sie eine Lösung von (2) mit dem Ansatz $v = (c, \dots, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Wie interpretieren Sie diese Lösung?

8. Sei $(x, v) = (x_i, v_i)$, $i = 1, \dots, N$ eine Lösung des Systems (2).

(a) Zeigen Sie für $v_c(t) := 1/N \sum_{i=1}^N v_i(t), \quad x_c(t) := 1/N \sum_{i=1}^N x_i(t)$ gilt

$$v_c(t) = v_c(0), \quad x_c(t) = x_c(0) + v_c(0)t.$$

(b) Bestimmen Sie ein möglichst großes $\alpha > 0$, so dass gilt,

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = 0, \quad \forall \beta \in [0, \alpha),$$

mit $V(t) := v_1(t) - v_2(t)$, $N = 2$ und $d = 1$, und interpretieren Sie diese Aussage.

Hinweis: Finden Sie eine DG für $V(t)$ und $X(t) := x_1(t) - x_2(t)$. Verwenden Sie das Lemma von Gronwall um eine obere Schranke für $V(t)$, die von $X(t)$ abhängt, zu finden. Setzen Sie diese ein um eine obere Schranke von $X(t)$ zu finden und verwenden Sie diese obere Schranke wiederum um die Aussage zu zeigen.

[1] Cucker-Smale Modell - F. Cucker and S. Smale. On the mathematics of emergence. *Japan.J.Math. 2, (2007), 197-227.*