1. a) Betrachten Sie das Randwertproblem 1. Ordnung auf $[0,1]$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{mit der Randbedingung} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hat das Randwertproblem eine Lösung?

b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Randwertproblems 1. Ordnung auf $[0,\pi]$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{mit der Randbedingung} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$.

2. a) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme, falls sie existieren:

i) $u'' + 4u = 0$ und $u'' + 4u = 2x$ mit $u(-\pi) = u(\pi)$ und $u'(-\pi) = u'(\pi)$,

ii) $u'' + 2u' + 5u = 0$ mit $u(0) = 2$ und $u(\frac{\pi}{4}) = 1$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Randwertproblems, falls sie existiert:

$$(yy')' = 1 - 3x \text{ mit } y(0) = y(1) = 0$$

3. Für welche Werte von L ist das Randwertproblem

$$u'' + 2u' + 2u = 0\,, \quad x \in [0, L]\,,$$

mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$, $u(L) = 1$ lösbar? Ist die Lösung, wenn sie existiert, eindeutig?

4. Gegeben ist die Differentialgleichung vom Eulerschen Typ

$$x^2 u'' - xu' + u = 0\,, \qquad x \in [1, A]$$

mit den Randbedingungen $u'(1) = 1$, $u(A) = b$, wobei $A, b \in \mathbb{R}$ und $A > 1$ gilt.

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Für welche A ist das Randwertproblem eindeutig lösbar? Geben Sie für ein A, für das keine eindeutige Lösbarkeit vorliegt, je einen Wert von b an, für den das System keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

5. a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems $u'' = f(x)$ mit $u'(0) = \rho_1$, $u(2) = \rho_2$.

b) Lösen Sie das Randwertproblem $u'' = \mathrm{e}^x - x^2$ mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$, $u(2) = 1$.

6. a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Randwertproblem $u'' - \lambda u = 0$ mit den Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ nichttriviale Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C[(0,1)]$ das Randwertproblem $u'' - au = f$ mit den Randbedingungen $u'(0) = u'(1) = 0$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ eine eindeutige Lösung hat.

7. Gegeben ist der Differentialoperator

$$Lu = u'' + \frac{1}{x} u'$$

mit den Randbedingungen $u(1) = 0$ und $u'(2) = 0$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu = 0$. Eine Lösung der Gleichung $Lu = 0$ ist offensichtlich, eine zweite ist nicht schwer zu finden. Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit der Funktionen nach.

b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems $Lu = f$ für $f \in C([1,2], \mathbb{R})$.

c) Bestimmen Sie die Greensche Funktion von L.

8. a) Bestimmen Sie die Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$u'' + 4u = 0\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,.$$

b) Was passiert mit der Greenschen Funktion, wenn die Randbedingung auf $u(0) = u(\pi) = 0$ geändert wird?