1. Jede der Funktionen $\sin(x-2t)$, $2\cos 3x + 5\sin 3x$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ und $\frac{x}{t}$ löst eine der folgenden DGLn. Welche? Überlegen Sie zu den entsprechenden DGLs auch den Typ, also ob sie linear oder nichtlinear, gewöhnlich oder partiell sind und welche Ordnung sie haben.

a) $x^2\frac{d^3y}{dx^3} - 5x\frac{dy}{dx} + 7y = 0$

b) $\dot{y} + t^3 y = e^{-t}$

c) $\dot{y} + ty^3 = e^{-t}$

d) $y'' + 9y = 0$

e) $\ddot{x} + \sin x = 0$

f) $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$

g) $u_t + 2u_x = 0$

h) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

i) $u_t + uu_x = 0$

j) $u_t + uu_x = u_{xxx}$

2. Zeigen Sie, dass $u(x,t) := \sin(x \pm ct)$ und allgemeiner $u(x,t) := w(x \pm ct)$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

sind. Was ist die Bedeutung von $c \in \mathbb{R}$ und in welche Richtung bewegen sich diese Wellen? Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ die Ortsvariable und $t \in \mathbb{R}$ die Zeit.

3. Ein (lineares) Federpendel mit Reibung wird durch die Differentialgleichung

$$my'' = -ry' - ky$$

beschrieben. Dabei ist y die Auslenkung aus der Ruhelage $y = 0$, $m > 0$ die Masse, $r > 0$ der Reibungskoeffizient und $k > 0$ die Federkonstante.

a) Benützen Sie den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, $\quad t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$, um durch Einsetzen zwei verschiedene reelle Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu finden.

b) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von m, r und k.

c) Erhält man mit dieser Methode immer zwei Lösungen?

Hinweis: im Fall $\lambda \notin \mathbb{R}$ sind der Realteil und der Imaginärteil von $e^{\lambda t}$ reelle Lösungen. Weisen Sie das nach!

4. Formulieren Sie die Differentialgleichungen

a) $y''(x) - \sin(x)\,(y'(x))^2 y(x) = \cosh(x) - (y(x))^2\,,$ b) $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 2e^{3x}\,,$

jeweils als ein System 1. Ordnung.

5. Eine Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t))\,,$$

bei der die rechte Seite nicht explizit von t abhängt, heißt *autonom*.

a) Zeigen Sie, dass jede Lösung einer autonomen Differentialgleichung translationsinvariant ist, dh. mit x ist auch $u(t) = x(t+a)$ mit $a, t \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

b) Wählen Sie $f(x) = x(x-1)$ und lösen Sie die Differentialgleichung, indem Sie alle Terme, in denen x vorkommt auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren, also durch *Separation der Variablen*. Skizzieren Sie die Lösungen. Auf welchem Intervall existieren die Lösungen?

6. Gegeben ist die DGL
$$x' = -2tx^2.$$

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DGL.

b) Verifizieren Sie, dass $x(t) = \frac{1}{t^2+c}$, $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist und skizzieren Sie einige dieser Lösungen.

c) Bestimmen Sie die Lösung des AWP $x(1) = \frac{1}{2}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert diese Lösung?

d) Bestimmen Sie die Lösung des AWP $x(1) = -\frac{1}{2}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert diese Lösung?

e) Gibt es eine Lösung des AWP $x(1) = 0$?

7. Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem $y'(x) = f(y(x))$ mit $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Richtungsfelder und bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung:

a) $f(y_1, y_2) = (2, 3)\,,$

b) $f(y_1, y_2) = (1, y_1)\,,$

c) $f(y_1, y_2) = (1, y_2)\,,$

d) $f(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\,,$

e) $f(y_1, y_2) = (y_1, -y_2)\,.$

8. Gegeben ist das lineare System von DGLs
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - y. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Integralkurven der DG logarithmische Spiralen sind. Fertigen Sie eine Skizze des Vektorfeldes und der Integralkurven an.
Hinweis: transformieren Sie auf Polarkoordinaten (r, φ) und leiten Sie eine DG für r und φ her.

b) Schreiben Sie das System als äquivalente DGL 2. Ordnung für $x(t)$, indem sie die DG für x nochmals nach t ableiten. Suchen Sie komplexe und reelle Lösungen dieser DG 2. Ordnung mittels des Exponentialansatzes $x(t) = e^{\lambda t}$.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix des obigen Systems von DG. Was fällt dabei auf? Wie hängt das mit b) zusammen?