1. a) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das RWP $u'' - \lambda u = 0,\ u(0) = 0,\ u(1) = 0$ nichttriviale Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an.

b) Untersuchen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C[0,1]$ die Lösbarkeit des inhomogenen RWPs

$$u'' - \lambda u = f(x), \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

2. a) Bestimmen Sie die Greensche Funktion der Differentialgleichung $u'' + 4u = 0\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,.$

b) Was passiert mit der Greenschen Funktion, wenn die Randbedingung auf $u(0) = u(\pi) = 0$ geändert wird?

3. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu :=& -(pu')' + qu = f\,, \quad x \in [a,b] \\ R_1 u :=& \alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a) u'(a) = r_1\,, \\ R_2 u :=& \alpha_2 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = r_2\,, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen p und q hinreichend glatt sind, $p > 0$ auf $[a,b]$ und $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0)$ für $i = 1,2$. Nehmen Sie an, dass das Randwertproblem für $f = 0 = r_1 = r_2$ nur trivial lösbar ist. Sind weiters u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen von $Lu = 0$ mit $R_1 u_1 = 0$ und $R_2 u_2 = 0$. Dann gilt:

$$\kappa(x) := p(x)(u_1' u_2 - u_1 u_2') = c\,, \quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$$
$$G(x,s) = \frac{1}{\kappa} \begin{cases} u_1(s) u_2(x) & a \leq s \leq x \\ u_1(x) u_2(s) & a \leq x \leq s \end{cases}$$

4. Gegeben ist der Differentialoperator $Lu = u'' + \frac{1}{x} u'$ mit den Randbedingungen $u(1) = 0$ und $u'(2) = 0$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu = 0$. Eine Lösung der Gleichung $Lu = 0$ ist offensichtlich, eine zweite ist nicht schwer zu finden. Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit der Funktionen nach.

b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems $Lu = f$ für $f \in C([1,2], \mathbb{R})$.

c) Bestimmen Sie die Greensche Funktion von L.

5. a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu = u'' + p(x) u' + q(x) u = 0$$

durch die Substitution $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p\,dx} u(x)$ in die Form

$$v'' + k(x) v = 0$$

gebracht werden kann. Geben Sie die Funktion k explizit an.

b) Wie wirkt sich diese Tranformation auf das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ aus?

c) Transformieren Sie die Hermitesche Differentialgleichung $u'' - 2xu' + 2nu = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}_0$.

6. Gegeben ist das Randwertproblem

$$Lu := -(xu')' = f(x), \qquad u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Randwertproblems.

c) Zeigen Sie, dass das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ nur reelle und positive Eigenwerte besitzt.

Freiwillige Zusatzaufgaben:

(Die Inhalte dieser Aufgaben sind prüfungsrelevant! Sie sind aber freiwillig, weil der Stoff voraussichtlich erst nach der letzten UE (am 13/6/2019) in der VO durchgenommen wird.)

7. Gegeben ist die Wellengleichung mit Randbedingungen

$$u_{tt} = u_{xx},\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0\,,\ \ x \in [0,1]\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Führen Sie einen Separationsansatz durch, d.h. bestimmen Sie alle Lösungen der Form $u(x,t) = w(t)v(x)$. Dieser Ansatz führt auf ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem für die Funktion v.
Bestimmen Sie damit die Lösung der Wellengleichung, die zusätzlich zu den Randbedingungen auch die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x)\,,\ \ x \in [0,1]$$

mit geeigneten Funktion g, h erfüllt. Entwickeln Sie dazu die Lösung in eine Fourierreihe

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Die Konvergenz der auftretenden Reihe muss nicht untersucht werden.

Hinweis: Der Separationsansatz führt auf $w''(t)v(x) = w(t)v''(x)$, und Division durch wv ergibt

$$\frac{w''}{w} = \frac{v''}{v}\,.$$

Die linke Seite hängt nur noch von t ab und die rechte nur von x. Die Gleichung kann nur dann für alle x und t erfüllt sein, wenn gilt

$$\frac{w''}{w} = \lambda,\ \frac{v''}{v} = \lambda\,, \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$Lu = u'' + \lambda u = 0$$

mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$ und $u(l) = 0$, $l > 0$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem handelt.

b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte positiv sind, indem Sie die Gleichung $\lambda u = -u''$ mit y multiplizieren und partiell integrieren.

c) Bestimmen Sie die die Eigenfunktionen u_k.

9. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Eigenwertproblems

$$-(xu')' = \frac{\lambda}{x}u, \qquad u(1) = 0,\ u(\mathrm{e}) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass alle Eigenwerte positiv sind und man daher $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ setzen kann. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit u und integrieren Sie über das Intervall $[1, \mathrm{e}]$. Es handelt sich hier um eine Eulersche Differentialgleichung. Machen Sie daher einen Ansatz $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.