1. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt eine Ellipse in der Ebene. Zeichnen Sie die Ellipse. Bestimmen Sie einen Tangentialvektor, einen Normalvektor und die Gleichung der Tangente an die Ellipse in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) der Ellipse. Machen Sie dies auf zwei Arten:

a) Durch Auflösen der Gleichung nach x oder y.

b) Unter Verwendung der Parametrisierung

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. Sei $\epsilon > 0$. Betrachten Sie die skalierte Lotka-Volterra-Gleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t), \\ y'(t) &= -\epsilon y(t) + x(t)y(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Funktion $(x, y) \to \Phi(x, y) := x + y - \epsilon \ln x - \ln y$ ist eine Erhaltungsgröße, d.h. für Lösungen $t \to (x(t), y(t))$ der Lotka-Volterra-Gleichung gilt, dass $t \to \Phi(x(t), y(t))$ konstant ist.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x'(t) + \cos(t)\, x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t\,.$$

4. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = t(1 + x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(0) = 2$.

5. Skizzieren Sie das Richtungsfeld und lösen Sie jeweils das AWP $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ für

a) $x' = -2x + 1$,

b) $x' = 2x + \cos 3t$.

Diskutieren Sie jeweils das Verhalten der Lösungen für $t \to \pm\infty$. Stellen Sie einige Lösungskurven in einer Skizze dar.

6. Substituieren Sie $x(t) = \frac{1}{u(t)}$ in der gegebenen nichtlinearen Differentialgleichung

$$x'(t) = \cos(t)\, x(t) + \sin(t)\, (x(t)^2),$$

um daraus eine lineare Differentialgleichung zu erhalten. Lösen Sie diese lineare Differentialgleichung.

7. Die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$x' = -ax + bx^\gamma$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $\gamma \neq 1$ ist separabel. Lösen Sie diese Differentialgleichung mittels der Methode der Separation der Variablen.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Substitution, um die notwendige Integration durchzuführen.

8. Gegeben ist die DGL $x' = ax - x^2,\ x \in \mathbb{R},\ a > 0$.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL auf zwei Arten:

i) als Bernoulli-DGL ii) als separable DGL

b) Lösen Sie das AWP $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $x_0 \in \mathbb{R}$ das maximale Zeitintervall I_{max}, auf dem die Lösung des AWP existiert. Was passiert an den Randpunkten von I_{max}?

d) Fertigen Sie eine Zeichnung an, die das Verhalten der Lösungskurven und das Richtungsfeld wiedergibt.

Bemerkung: Diese DGL beschreibt Wachstumsprozesse mit Wachstumsrate a und einem negativen quadratischen Term, der das Wachstum infolge von Konkurrenzeffekten begrenzt. Dies führt zunächst auf die logistische DGL

$$x' = ax - kx^2$$

mit $a, k > 0$. Mit der Umskalierung $x \to x/k$ erhält man die oben angegebene Form der logistischen DGL.

9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DG $x' = x^2 + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2}$.
Hinweis: Eine Lösung dieser DG lässt sich in der Form $x(t) = a/t$ mit einem geeigneten $a \in \mathbb{R}$ schreiben.