1. Zeigen Sie, dass

a) die lineare homogene DGL 2. Ordnung
$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$
durch die Substitution $x(t) = e^{\int y(t)dt}$ in eine Riccati-DGL für $y(t)$ transformiert wird.

b) die DGL $x' = f(ax + bt + c)$ durch die Substitution $u := ax + bt + c$ in eine autonome und daher separable DGL transformiert wird.

2. Die logistische Gleichung
$$x'(t) = \lambda x(t)(K - x(t)) = \lambda K x(t) - \lambda x^2(t)$$
ist eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Interpretieren Sie das Modell und lösen Sie die logistische Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Geben Sie das Richtungsfeld für die DG an und zeichnen Sie die Intgralkurve ein.

3. Lösen Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung
$$x' = \frac{t + 2x}{t} = 1 + 2\left(\frac{x}{t}\right).$$

4. Berechnen Sie alle möglichen Lösungen der Differentialgleichung
$$x'(t) = 2t\sqrt{x}$$
mittels Separation der Variablen. Geben Sie auch die konkreten Lösungen zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $x(0) = 0$ und $x(0) = -1$. Was passiert im letzten Fall? Ist die Lösung jeweils eindeutig?

5. Lösen Sie die DGL
$$2xydx + (x^2 + 3y^2 - 1)dy = 0$$
als exakte DGLs oder mit Hilfe eines geeigneten integrierenden Faktors. Skizzieren Sie die Integralkurven als Niveaulinien der Stammfunktion $F(x, y)$.

Hinweis: Untersuchen und zeichnen Sie jeweils zuerst die Niveaulinie $F(x, y) = 0$.

6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$(y + xy^2) - xy' = 0$$
mittels eines geeigneten integrierenden Faktors der Form $m(y)$. Bestimmen Sie diejenige Lösung, die durch den Punkt $(x, y) = (2, -2)$ verläuft.

7. Bestimmen Sie mithilfe eines integrierenden Faktors der Gestalt $m(x, y) = m(xy)$ eine Lösung des Anfangwertproblems
$$2x^2 y \ln y + (x^3 + x)\, y' = 0\,, \qquad y(0) = \frac{1}{e}\,.$$

8. Berechnen Sie die Lösung (in impliziter Form) der Differentialgleichung
$$y'(x) = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}\,.$$

Hinweis: Ansatz für den integrierenden Faktor $m(x, y) = x^a y^b$.

9. Berechnen Sie jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen

a) $y''(t) = -y(t)$,
b) $y''(t) = y(t)$,
c) $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.