1. Betrachten Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung.

a) $y''(t) - 4y(t) = 0$

b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

c) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$

2. Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung für die ODE

$$2t^3y^{(3)} + 10t^2y^{(2)} - 4ty' - 20y = 0.$$

vom *Eulerschen Typ* auf 2 Arten:

a) Wählen Sie $y(t) = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ als Ansatz für die Lösung.

b) Substituieren Sie $t = e^\tau$.

3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Systeme

a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x$

b) $x' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$

4. Betrachten Sie die Funktion f definiert durch

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & t > 0 \text{ und } x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & t > 0 \text{ und } 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & t > 0 \text{ und } t^2 < x \end{cases}$$

Ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig? Ist f lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument?

5. Gegeben ist ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die bezüglich ihres zweiten Arguments Lipschitz–stetig ist mit Lipschitz–Konstante L .
Zeigen Sie: Sind zwei Lösungen x_j , $j = 1, 2$ der Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$, $t \in I$, gegeben, so gilt für alle $t > t_0 \in I$ die Abschätzung

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \, e^{L|t-t_0|} \, .$$

Hinweis: Betrachten Sie $\ln(|x_1(t) - x_2(t)|)$ und verwenden Sie an geeigneter Stelle den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

6. Beweisen Sie: Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt. Falls $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x ist, so ist f Lipschitz bezüglich x.

Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt. Angenommen $f(t, x)$ ist auf G nicht Lipschitz bezüglich x. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ Punkte (t_n, x_n), $(t_n, y_n) \in G$ existieren mit

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n) > n|x_n - y_n|.$$

Benützen Sie die Kompaktheit von G, um daraus einen Widerspruch zur lokalen Lipschitz-Eigenschaft herzuleiten.

7. Beweisen Sie die folgende allgemeine Version des *Lemmas von Gronwall:*

Seien u und $\delta\,, L : I = [t_0, t_1] \to [0, \infty]$ stetige Funktionen. Falls

$$u(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} L(x) u(x)\, dx\,, \quad \forall t \in I\,,$$

dann gilt

$$u(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} \delta(x) L(x) e^{\int_x^t L(u)\, du}\, dx\,, \quad \forall t \in I\,.$$

Hinweis: Setzen Sie $y(t) := \int_{t_0}^{t} L(x)u(x)(x)dx$ und zeigen Sie $y' \leq Ly + L\delta$. Setzen Sie dann $z(t) := y(t)e^{-\int_{t_0}^{t} L(x)dx}$ und leiten Sie eine Differential-Ungleichung für $z(t)$ her.

8. Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$x'(t) = t - (x(t))^2\,, \quad t \in \mathbb{R},\ x(0) = 1$$

die ersten drei Iterationen der Picard-Iteration.