1. Betrachten Sie das AWP

$$x_1' = x_2 x_3, \quad x_2' = -x_1 x_3, \quad x_3' = 2, \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0.$$

Machen Sie 2 Schritte der Picard-Iteration, ausgehend von der Startfunktion $x(t) = (0,1,0)^T$. Würde die Iteration konvergieren? Geben Sie die n-te Iteration explizit an.

2. Führen Sie vier Schritte der Picarditeration für das AWP $x' = x^2$, $x(0) = 1$ aus. Dies legt nahe, dass gilt

$$x_k(t) = 1 + t + t^2 + \cdots t^k + O(t^{k+1}).$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der exakten Lösung $x(t)$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ könnte man $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$ erwarten? Geben Sie ein $\delta > 0$ an, sodass die Picarditeration auf $[-\delta, \delta]$ gegen die exakte Lösung konvergiert.

3. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= t^2(1 - (x(t))^2) = f(t, x(t)), \quad t \in [1,3] \\ x(2) &= 1\,. \end{aligned}$$

Wählen Sie die Menge G im Satz von Picard–Lindelöf als $G = [1,3] \times B_1(1)$ und geben Sie eine Lipschitz–Konstante der Funktion $f(t, x(t))$ bezüglich dem 2. Argument an.

Für welches Intervall garantiert der Satz von Picard–Lindelöf die Existenz der Lösung?

4. Für (t,x) aus dem Rechteck $\{(t,x) : |t| < 10\,, |x-1| < c\}$ ist die Funktion f definiert durch

$$f(t,x) = 1 + x^2\,.$$

a) Geben Sie mit dem Satz von Picard–Lindelöf ein Intervall $[-\delta, \delta]$ an, auf dem das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t))\,, \quad x(0) = 1\,,$$

genau eine Lösung auf $(-\delta, \delta)$ besitzt.

b) Wie muss die Menge G gewählt werden, damit die Intervalllänge 2δ aus a) größtmöglich wird?

c) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (durch Separation), also indem Sie alle Terme, in denen x vorkommt, auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Auf welchem Intervall existiert die Lösung?

5. Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y''(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

eine eindeutige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

6. Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung haben und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall.

a) $x' = \sin(x^2 + t)\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$

b) $x' = (x^2 + t)\sin x\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$

c) $x' = \frac{t}{x}\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,\ x_0 \neq 0\,.$

7. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz bezüglich x. Zeigen Sie, dass jede der folgenden Bedingungen globale Existenz der Lösung des AWP in Vorwärtszeit garantiert.

a) Es existiert $r > 0$ mit $f(t, x) \cdot x < 0$ für alle $|x| \geq r$.

b) Es existiert $k \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ mit $f(t, x) \cdot x \leq kx \cdot x$ für alle $|x| \geq r$.

8. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie: Falls $o \in C^1(J, \mathbb{R})$ eine strikte Oberlösung und $x \in C^1(J; R)$ eine Lösung der ODE $x' = f(t, x)$ ist, dann gilt:

$$x(t_0) < o(t_0) \Rightarrow x(t) < o(t) \quad \forall t \in (t_0, b).$$