1. Betrachten Sie das lineare System

$$x'(t) = A(t)x(t)\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem an.

Hinweis: Eine Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x_1(t) = x_2(t)$ und eine weitere kann mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert berechnet werden.

2. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der DGL

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/t^2 & -1/t \end{pmatrix} x$$

mittels des Reduktionsverfahrens von d'Alembert. Benützen Sie dabei, dass $x(t) = (t, 1)^T$ eine Lösung der DGL ist. Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit der Lösungen nach.

3. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x'(t) = A(t)x(t)$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn es eine reguläre Matrx $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $X(t) = Y(t)\,B$ für alle $x \in I$.

b) Die Matrix $X(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}$ ist eine Hauptfundamentalmatrix, dh eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ mit der Eigenschaft $Y(t_0) = I_{n\times n}$.

4. Sei $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

a) Zeigen Sie die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(XY) = \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right).$$

b) Falls $X(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $t \mapsto (X(t))^{-1}$ in $C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Geben Sie $(X^{-1})'$ an.

c) Sei Y eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x' = A(t)x$. Welche Differentialgleichung wird von Y^{-1} erfüllt?

5. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

a) $\det e^A = e^{spur\, A}$

b) $e^{A^T} = (e^A)^T$

c) Aus $A^T = -A$ (d.h. A ist schiefsymmetrisch) folgt, dass e^{At} orthogonal ist und $\det e^{At} = 1$.

6. **a)** Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $x_1(t) = t^3$ und $x_2(t) = |t|^3$ auf $(-1, 1)$ linear unabhängig sind, dass aber $W(t) = 0$ gilt. Wie ist das möglich?

b) Gibt es eine reelle 2×2-Matrix A mit

$$e^A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}?$$

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLs und skizzieren Sie die Integralkurven:

a) $x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$

b) $x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$

8. Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $x' = A_i x$, $i = 1,2,3$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{t+1}{t} \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\,.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix $Y(t)$.

b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante von $Y(t)$ und verifizieren Sie die Aussage des Satzes von Liouville.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

d) Lösen Sie das AWP $x(2) = (1,0)^T$.