1. In jedem Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks befindet sich eine Maus. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen die Mäuse aufeinander zuzukrabbeln. Dabei krabbelt Maus 1 immer direkt auf Maus 2 zu, Maus 2 auf Maus 3 und Maus 3 auf Maus 1. Die Geschwindigkeit jeder Maus ist dabei gleich dem Vektor von seiner Position zur Position der Maus, auf die sie zukrabbelt.

Bestimmen Sie die Bahnkurven der Mäuse, indem Sie ein System von Differentialgleichungen für ihre Positionen aufstellen und lösen. Was passiert für $t \to \infty$?

Hinweis: Es ist vorteilhaft, die Position der k-ten Maus durch eine komplexe Zahl z_k, $k = 1, 2, 3$ zu beschreiben. Eine geschickte Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems ist ebenfalls von Vorteil.

Freiwillig: Was passiert, wenn die Anfangspositionen der Mäuse ein allgemeines Dreieck bilden? Was passiert, wenn es mehr als drei Mäuse gibt?

2. a) Gegeben ist das System von Differentialgleichungen $x' = Ax + b$ mit einer konstanten $n \times n$-Matrix A und einer konstanten Inhomogenität b. Zeigen Sie, dass im Fall einer regulären Matrix A immer eine konstante Partikulärlösung existiert. Welche Bedingung an b garantiert im Fall einer singulären Matrix A die Existenz einer konstanten Partikulärlösung?

b) Wie muss die rechte Seite f gewählt werden, dass bei der linearen Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = f(t)$$

Resonanz auftritt?

3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y''' - 3y' + 2y = 0$ und suchen Sie eine spezielle Lösung der DG $y''' - 3y' + 2y = 9e^x$ auf zwei Arten: a) mittels Variation der Konstanten und b) mittels der Ansatzmethode.

4. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen, berechnen Sie dabei die Partikulärlösungen mit der Ansatzmethode:

a) $y'' + y = \sin t + \sin 3t$

b) $y'' + y = t\, e^{-2t} \cos t$

c) $y'' + y' + y = \sin t$

5. Gegeben sei die skalare Differentialgleichung $y'' + q(t)y = 0$ mit einer stetigen Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es seien $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ zwei Lösungen dieser DG.

a) Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante $W(t)$ konstant ist.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass für linear unabhängig Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ gilt:

(i) Aus $x(t_1) = 0$ folgt $x'(t_1) \neq 0$ und $y(t_1) \neq 0$.

(ii) Falls $x(t_1) = x(t_2) = 0$ gilt und $x(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$, dann hat $y(t)$ in (t_1, t_2) genau eine Nullstelle.

Hinweis: Die Eigenschaft (ii) ist die sogenannte *Trennungseigenschaft* für Nullstellen der Lösungen solcher Differentialgleichungen. Daraus folgt zum Beispiel, dass, wenn eine Lösung oszilliert, alle anderen Lösungen ebenfalls oszillieren. Ein einfaches Beispiel dafür sind im Fall $q(t) = 1$ die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$.

6. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \cos t$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 1.1$. Wählen Sie für die Partikulärlösung den Ansatz

$$y_p(t) = d \cos(t + \delta)\,.$$

7. Untersuchen Sie für die folgenden Differentialgleichungen, wie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängen. Stellen Sie ihre Resultate in übersichtlicher Form dar. Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an und untersuchen Sie das Wachstumsverhalten der Lösungen für $t \to \infty$.

a) $y'' - ay' + y = 0$

b) $y^{(4)} + 2y'' + ay = 0$

8. Ein einfaches Räuber-Beute-Modell nach Lotka und Volterra hat die Form

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by)\,, \\ y' &= y(-c + dx)\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $x(t)$ beschreibt die Größe der Population der Beutetiere und $y(t)$ beschreibt die Größe der Population der Räuber als Funktion der Zeit t. Dabei ist natürlich nur der Bereich $x \geq 0$ und $y \geq 0$ biologisch sinnvoll.

a) Interpretieren Sie das Modell.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte.

c) Wie verhalten sich die Lösungen mit den Anfangswerten $(x_0, 0)$ bzw. $(0, y_0)$?

d) Für das System von Differentialgleichungen $x' = xg(y)$ und $y' = yh(x)$ ist $u(x, y) = \frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor. Also $-\frac{h(x)}{x}\,dx + \frac{g(y)}{y}\,dy = 0$, woraus folgt $F(x, y) = \int(-\frac{h(x)}{x}\,dx + \frac{g(y)}{y}\,dy) = const.$ Die Funktion $F(x, y)$ ist also eine *Erhaltungsgröße*, verwenden Sie das um eine implizite Darstellung der Integralkurven des gegebenen Räuber-Beute Modells zu finden.

e) Skizzieren Sie Integralkurven und interpretieren Sie das Verhalten der Lösungen.