1. Ein einfaches Modell der Ausbreitung einer Epidemie hat die Form

$$\begin{aligned} x' &= -kxy \\ y' &= kxy - ly \\ z' &= ly \end{aligned}$$

Dabei ist $x(t)$ die Größe der Population der Gesunden, $y(t)$ die Größe der Population der Erkrankten und $z(t)$ die Population der Gesundgewordenen und daher Immunen. Die Konstante $k > 0$ beschreibt die Infektionsrate von Gesunden durch Kontakt mit Kranken. Die Konstante $l > 0$ ist die Gesundungsrate der Erkrankten.

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte. Versuchen Sie den Ausbruch und den Verlauf einer Epidemie zu verstehen, indem Sie die Integralkurven des entkoppelten (x, y)-Systems analysieren. Welche Startwerte (x_0, y_0) entsprechen dem Ausbruch einer Epidemie und wie verläuft sie?

Hinweis: Leiten Sie eine Differentialgleichung für y als Funktion von x her und lösen Sie diese.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = -x^2 \sin t$.

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, für welche $t \geq 0$ die Lösung existiert.

d) Ist die Lösung $x(t) = 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil?

3. Zwei stationäre Massen m_1, m_2 haben den Abstand r. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft auf der Geraden zwischen den beiden Massen. Sei x der Abstand des Teilchens von dem Massenpunkt m_1. Die Position $x(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$mx'' = \frac{Gmm_2}{(x-r)^2} - \frac{Gmm_1}{x^2}$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.

Bestimmen Sie die Ruhelage des Teilchens. Ist die Ruhelage stabil oder instabil?

4. Betrachten Sie das skalare autonome System $x' = f(x)$, welches die Ruhelage $\bar{x}$ habe. Zeigen Sie:

a) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < 0$ für $x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ und $f(x) > 0$ für $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$, dann ist $x \equiv \bar{x}$ asymptotisch stabil.

b) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > 0$ für $x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ und $f(x) < 0$ für $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$, dann ist $x \equiv \bar{x}$ instabil.

5. Untersuchen Sie, ob für die folgenden Differentialgleichung die Lösung $x(t) = 0$, $t \geq 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist? Untersuchen Sie auch, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x(0) = a$ auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt ist.

a) $x' = -tx + x^3$

b) $x' = \frac{x^2}{1+t^2}$

6. Schreiben Sie die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + by' + ky = 0$$

als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

a) Klassifizieren und skizzieren Sie für $k = 0, 1, -1$ die auftretenden Phasenporträts, wenn b ganz $\mathbb{R}$ durchläuft.

b) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn (k, b) die Gerade $k = -b$ durchläuft.

c) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn (k, b) den Kreis $k^2 + b^2 = 1$ durchläuft.

Überlegen und benützen Sie dazu eine Klassifikation ebener linearer Systeme in der Spur-Determinante Ebene. Wo treten jeweils Änderungen (Verzweigungen) im Stabilitätsverhalten bzw. im Phasenporträt auf?

7. Das folgende Beispiel zeigt, dass man im Fall nichtautonomer linearer Differentialgleichungen $x' = A(t)x$ von den Eigenwerten der Matrix A nicht auf die Stabilität der Ruhelage $\bar{x} = 0$ schließen kann. Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t\,\cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t\,\cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$ von $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ haben negativen Realteil.

b) $x(t) = e^{\frac{t}{2}}(-\cos t\,, \sin t)^T$ ist eine Lösung der Differentialgleichung.

c) Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist instabil.

8. Das folgende Lotka-Voltera Modell beschreibt das zeitliche Verhalten zweier Spezies x und y

$$\begin{aligned} x' &= 3x(2 - x + y)\,, \\ y' &= y(3 + x - 3y)\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems.

b) Untersuchen Sie die Stabilität und den Typ der Gleichgewichtspunkte mittels Linearisierung.

c) Zeichen Sie ein plausibles Phasenporträt im 1. Quadranten ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

d) Interpretieren Sie das Phasenporträt in Hinblick auf das Verhalten der beiden Populationen für $t \to \infty$.

9. Die Bewegung eines Pendels wird durch die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0$$

beschrieben. Dabei beschreibt der Winkel y die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System 1. Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Linearisierung dieses Systems von Differentialgleichungen an den Gleichgewichtspunkten $(y, y') = (0, 0)$ und $(y, y') = (\pm\pi, 0)$.

c) Bestimmen Sie für die Linearisierungen das Phasenporträt und untersuchen Sie die Stabilität der Nulllösung.

d) Untersuchen Sie die Stabilität der Gleichgewichtspunkte für das nichtlineare System.

Hinweis: Die Gesamtenergie $E = ((y')^2/2 - \omega^2 \cos y)$ ist eine Erhaltungsgröße.