1. Betrachten Sie das zweidimensionale System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -y + ax(x^2 + y^2)\,, \\ y' &= x + ay(x^2 + y^2)\,, \quad a \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

und zeigen Sie:

a) Der Ursprung ist für die Linearisierung ein Zentrum.

b) Für die nichtlineare Differentialgleichung ist der Ursprung für $a < 0$ stabil und für $a > 0$ instabil.

c) Zeichnen Sie das Phasenporträt für $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

2. Untersuchen Sie die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Ruhelage $\bar{x} = 0$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $x' = x \sin t$,

b) $x' = \sin x$,

c) $x' = -\sin x$,

d) $x' = -t \sin x$,

Geben Sie jeweils die an der Lösung $\bar{x} = 0$, $t \in \mathbb{R}$ linearisierte Differentialgleichung an.

3. Zeigen Sie, dass $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ eine Ljapunovfunktion des Differentialgleichungssystems

$$x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

ist und dass der Ursprung ein stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems ist.

Welche Aussage lässt sich mittels Linearisierung treffen?

4. Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung des mathematischen Pendels
$y'' + ry' + \sin y = 0$ mit Reibungskoeffizient $r \in \mathbb{R}\,,\ r \geq 0\,.$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System 1. Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte dieses Systems 1. Ordnung.

c) Bestimmen Sie die Linearisierung an den Gleichgewichtspunkten und klassifizieren Sie in Abhängigkeit von $r \geq 0$ den Typ der Gleichgewichtspunkte der Linearisierung.

d) Was kann man über die Stabilität der Gleichgewichtspunkte für die nichtlineare Differentialgleichung aussagen?

e) Skizzieren Sie ein plausibles Phasenporträt für kleine positive Werte von r.

5. Betrachten Sie für $G = \mathbb{R}^2$ das System

$$x' = y, \qquad y' = -x + y(4 - x^2 - 4y^2).$$

Definieren Sie die Hilfsfunktion $H(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $M := \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq H(x, y) \leq 2\}$ ist eine invariante Menge.

b) Die Menge M enthält keine Ruhelagen. Schließen Sie auf Existenz eines periodischen Orbits in M.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

6. Bestimmen Sie die stabile und instabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage $x = (0,0,0)$ des Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= -x_2 + x_1^2 \\ x_3' &= x_3 + x_1^2 \end{aligned}$$

7. Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Randwertproblems 1. Ordnung auf $[0,\pi]$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{mit der Randbedingung} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$.

8. Gegeben ist die Differentialgleichung vom Eulerschen Typ

$$x^2 u'' - x u' + u = 0\,, \qquad x \in [1,a]$$

mit den Randbedingungen $u'(1) = 1$, $u(a) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 1$ gilt.

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Für welche a ist das Randwertproblem eindeutig lösbar? Geben Sie für ein a, für das keine eindeutige Lösbarkeit vorliegt, je einen Wert von b an, für den das System keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

9. a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems $u'' = f(x)$ mit $u'(0) = \rho_1$, $u(2) = \rho_2$.

b) Lösen Sie das Randwertproblem $u'' = \mathrm{e}^x - x^2$ mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$, $u(2) = 1$.

10. a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Randwertproblem $u'' - \lambda u = 0$ mit den Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ nichttriviale Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C[(0,1)]$ das Randwertproblem $u'' + au = f$ mit den Randbedingungen $u'(0) = u'(1) = 0$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ eine eindeutige Lösung hat.