Differentialgleichungen 1 **1. Übungsblatt** Übung am 11.3.

Abgabe bis 9:00, 11.3.2021

1. Die Geschwindigkeitsverteilung $v_F(x)$ eines geradlinieg strömenden Flusses der Breite $2a$ sei als Funktion des Abstandes x von der Mittellinie als parabolisch angenommen

$$v_F(x) = v_0(1 - \frac{x^2}{a^2}) \ .$$

   Dabei ist v_0 die Geschwindigkeit in der Flussmitte, die bei $x = 0$ liegt. An den Ufern, d.h. bei $x = \pm a$ ist die Flussgeschwindigkeit null. Ein Schwimmer mit der Eigengeschwindigkeit $v_E = const.$ schwimmt immer quer zur Flussrichtung von einem Ufer zum anderen. Bestimmen Sie die Bahn des Schwimmers. Bestimmen Sie die Zeit, die der Schwimmer benötigt, und die Abdrift. Fertigen Sie eine Skizze an.

   Hinweis: Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem mit der y-Achse als Mittellinie des Flusses. Stellen Sie eine gewöhnliche DG für die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ des Schwimmers auf. Dabei sind die Differentialgleichungen für die Bewegung in x- bzw. y-Richtung entkoppelt.

2. Verifizieren Sie, dass jede der in Beispiel 1.4, (Skriptum Seite 4 unten) angegeben Funktionen eine der dort aufgelisteten DG löst.

3. (a) Plotten Sie die Funktion $u(x,t) := \sin(x - 2t)$. Erklären Sie, warum diese Funktion eine nach rechts laufende Sinuswelle beschreibt.
   Verschiedene Visualisierungen finden Sie hier:
   `https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/travelling_sine_wave.htm`

   (b) Zeigen Sie dass $u(x,t) := \sin(x \pm ct)$ und allgemeiner $u(x,t) := w(x \pm ct)$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

   sind. Was ist die Bedeutung von $c \in \mathbb{R}$ und in welche Richtung bewegen sich diese Wellen?

   Hinweis: Hier ist $x \in \mathbb{R}$ die Ortsvariable und $t \in \mathbb{R}$ die Zeit.

4. Ein (lineares) Federpendel mit Reibung wird durch die Differentialgleichung

$$my'' + by' + ky = 0$$

   beschrieben. Dabei ist y die Auslenkung aus der Ruhelage $y = 0$, $m > 0$ die Masse, $b \geq 0$ der Reibungskoeffizient und $k > 0$ die Federkonstante.

   (a) Benützen Sie den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$, um zwei verschiedene reelle Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu finden.

(b) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von m, b und k. Benützen Sie auch das MIT-Mathlet "Damped Vibrations", siehe
`http://mathlets.org/mathlets/damped-vibrations/`

(c) Erhält man mit dieser Methode immer zwei Lösungen?

Hinweis: im Fall $\lambda \notin \mathbb{R}$ sind der Realteil und der Imaginärteil von $e^{\lambda t}$ reelle Lösungen. Weisen Sie dies nach!

Freiwillige Zusatzaufgaben: Wie findet man eine zweite Lösung, wenn die Methode in (a) nur eine Lösung liefert?

Bemerkung: wir werden später sehen, dass im Fall einer linearen homogenen DG 2. Ordnung alle Lösungen als Linearkombination

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

zweier linear unabhängiger Lösungen y_1, y_2 dargestellt werden können.

5. Die Gleichung

$$f(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

beschreibt eine Ellipse in der Ebene. Zeichnen Sie die Ellipse. Bestimmen Sie in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) der Ellipse einen Tangentialvektor, einen Normalvektor und die Gleichung der Tangente an die Ellipse. Machen Sie dies auf zwei Arten:

(a) Durch implizites Differenzieren unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen.

(b) unter Verwendung der Parameterdarstellung

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

der Ellipse.

6. Gegeben ist das lineare System von DG

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - y. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösungen $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ logarithmische Spiralen durchlaufen.
Hinweis: Transformieren Sie dazu auf Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

und leiten Sie (durch Differenzieren nach t) Differentialgleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$ her, die explizit gelöst werden kann.

(b) Schreiben Sie das System als äquivalente DG 2. Ordnung für $x(t)$, indem Sie die DG für x nochmals nach t ableiten. Suchen Sie komplexe und reelle Lösungen dieser DG 2. Ordnung mittels des Exponentialansatzes $x(t) = e^{\lambda t}$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix des obigen Systems von DG. Was fällt dabei auf? Wie hängt das mit (b) zusammen?

Freiwillige Zusatzaufgabe: Fertigen Sie eine Skizze des Vektorfeldes und der Integralkurven an.

7. Suchen Sie eine gewöhnliche oder partielle DG in einem mathematischen oder angewandten Kontext, der ihren Interessen entspricht. Erklären Sie den Kontext und die Bedeutung der DG. Geben Sie die Ordnung der DG an. Ist die DG linear oder nichtlinear? Erklären Sie, warum Sie diese DG gewählt haben.

   Freiwillige Zusatzaufgabe: Wenn möglich, geben Sie eine interessante Lösung der DG oder einen interessanten Effekt an, der durch die DG erklärt oder beschrieben wird.

   Achtung: die DG darf nicht zu trivial sein und sollte sich von den Beispielen der Vorlesung und Übung unterscheiden!

   Hinweis: Literatur oder `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_named_differential_equations` bzw. `https://en.wikipedia.org/wiki/Category:Differential_equations`.