**1.** a) Schreiben Sie die Laplacegleichung im $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ an (die Herleitung ist nicht verlangt). Gesucht sind alle Lösungen $u = u(r)$ der Laplacegleichung, die nur von $r$ abhängen. Zeigen Sie, dass $u(r)$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt. Schreiben Sie diese Differentialgleichung als System erster Ordnung

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \dots \end{aligned}$$

wobei $'$ die Ableitung nach $r$ bezeichnet. Lösen Sie zuerst die Differentialgleichung für $v$ mit Separation der Variablen und danach die Differentialgleichung für $u$.

b) Machen Sie dasselbe für die Laplacegleichungen im $\mathbb{R}^3$,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

in Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta)$.

**2.** Leiten Sie die Energieerhaltungsgleichung $\frac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos\varphi(t) = const$ für die nichtlineare Pendelgleichung $\varphi''(t) + \omega^2 \sin\varphi(t) = 0$ ab.

**3.** Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die ODE

$$\phi''(t) + \omega^2 \sin\phi(t) = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

wobei $g$ die Erdbeschleunigung und $l$ die Fadenlänge des Pendels ist. Die Funktion $\phi : t \to \phi(t)$ beschreibt die Auslenkung des Pendels.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um. Hat die neue Variable eine physikalische Bedeutung?

b) Geben Sie eine Erhaltungsgröße an. Begründen Sie, warum es sich um eine solche handelt.

**4.** Gegeben ist das lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - y. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Integralkurven der DG logarithmische Spiralen sind. Fertigen Sie eine Skizze des Vektorfeldes und der Integralkurven an.

b) Schreiben Sie das System als äquivalente Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$, indem sie die Differentialgleichung für $x$ nochmals nach $t$ ableiten. Suchen Sie komplexe und reelle Lösungen dieser Differentialgleichung 2. Ordnung mittels des Exponentialansatzes $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix des obigen Systems von Differentialgleichung . Was fällt dabei auf? Wie hängt das mit b) zusammen?

**Hinweis zu a):** Transformieren Sie auf Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ und leiten Sie eine Differentialgleichung für $r$ und $\varphi$ her.

**5.** Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem $y'(x) = f(y(x))$ mit $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Vektorfelder und bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung:

a) $f(y_1, y_2) = (2, 3)\,,$

b) $f(y_1, y_2) = (1, y_1)\,,$

c) $f(y_1, y_2) = (1, y_2)\,,$

d) $f(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\,,$

e) $f(y_1, y_2) = (y_1, -y_2)\,.$

**6.** Gegeben ist die logistische Differentialgleichung $x' = x(1-x), \quad x \in \mathbb{R}$ .

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung mittels der Transformation $x = \frac{1}{y}$, die auf eine lineare Differentialgleichung für $y$ führt.

c) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen des AWP $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ für $t \to \pm\infty$ und fertigen Sie eine Zeichnung an, die das Verhalten der Lösungskurven wiedergibt.

d) Skizzieren Sie auch die Integralkurven.

**7.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x'(t) + \cos(t)\, x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t\,.$$

**8.** Substituieren Sie die Funktion $x(t)$ in der gegebenen nichtlinearen Differentialgleichung

$$x'(t) = \cos(t)\, x(t) + \sin(t)\, (x(t)^2),$$

geeignet, um daraus eine lineare Differentialgleichung zu erhalten. Lösen Sie diese lineare Differentialgleichung.

**9.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = x^2 + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2}.$$

**Hinweis:** Eine Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich in der Form $x(t) = a/t$ mit einem geeigneten $a \in \mathbb{R}$ schreiben.