1. Skizzieren Sie für die angegebenen (inhomogenen) Differentialgleichungen das Richtungsfeld. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

a) $x' = -2x + 3$ b) $x' = 2x + \cos 3t$ c) $x' = -\frac{x}{t} + 1$

Lösen Sie das AWP $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen für $t \to \pm\infty$. Skizzieren Sie einige typische Graphen von Lösungen. Welche dieser Differentialgleichungen hat Lösungen, die

i) für $t \in \mathbb{R}$ existieren?
ii) für $t \in \mathbb{R}$ existieren und beschränkt sind?
iii) periodisch sind?

2. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x' = ax - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung auf zwei Arten:
   i) als Bernoulli-Differentialgleichung
   ii) als separable Differentialgleichung
b) Lösen Sie das AWP $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.
c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $x_0 \in \mathbb{R}$ das maximale Zeitintervall I_{max}, auf dem die Lösung des AWP existiert. Was passiert an den Randpunkten von I_{max}?
d) Fertigen Sie eine Zeichnung an, die das Verhalten der Lösungen und das Richtungsfeld wiedergibt.

Bemerkung: Diese Differentialgleichung beschreibt Wachstumsprozesse mit Wachstumsrate a und einem negativen quadratischen Term, der das Wachstum infolge von Konkurrenzeffekten begrenzt. Dies führt zunächst auf die logistische Differentialgleichung

$$x' = ax - kx^2$$

mit $a, k > 0$. Mit der Umskalierung $x \to x/k$ erhält man die oben angegebene Form der logistischen Differentialgleichung.

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der (homogenen) Differentialgleichung

$$tx' = x + t\cos^2\left(\frac{x}{t}\right)$$

an. Bestimmen Sie weiters jene Lösungen, die $x(1) = 0$ erfüllen.
Hinweis: $\frac{d}{du}\tan u = \frac{1}{\cos^2 u}$

4. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x' = \frac{x^2 + 2tx}{t^2} \ .$$

auf zwei Arten. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Lösung definiert?
Fertigen Sie eine Skizze an, die das Verhalten der Graphen der Lösungen wiedergibt!

5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(y + xy^2) - xy' = 0$$

mittels eines geeigneten integrierenden Faktors der Form $m(y)$. Bestimmen Sie des Weiteren diejenige Lösung, die durch den Punkt $(x, y) = (2, -2)$ verläuft.

6. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(2y - 3x + 2)\,dx + x\,dy = 0\,,$$

indem Sie einen integrierenden Faktor bestimmen. Skizzieren Sie die Kurven $F(x, y) = c\,,\ c \in \mathbb{R}$ wobei F die Stammfunktion ist. Besteht ein Zusammenhang zu einem (inhomogenen) linearen System 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

7. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2xy\,dx + (x^2 + 3y^2 - 1)dy = 0$$

als exakte Differentialgleichung oder mit Hilfe eines geeigneten integrierenden Faktors. Skizzieren Sie die Niveaulinien der Stammfunktion $F(x, y)$.

Hinweis: Untersuchen und zeichnen Sie jeweils zuerst die Niveaulinie $F(x, y) = 0$.

8. Berechnen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung in impliziter Form

$$y'(x) = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}\,.$$

Hinweis: Ansatz für den integrierenden Faktor $m(x, y) = x^a y^b$.

9. Berechnen Sie jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen

a) $y''(t) = -y(t)$,
b) $y''(t) = y(t)$,
c) $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.