1. Untersuchen Sie die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität der Ruhelage $\overline{x} = 0$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $x' = x \sin t$,
b) $x' = \sin x$,
c) $x' = -\sin x$,
d) $x' = -t \sin x$,
e) $x' = -x^2 \sin t$.

Geben Sie jeweils die an der Lösung $\bar{x} = 0$, $t \in \mathbb{R}$ linearisierte Differentialgleichung an.

2. Betrachten Sie für $G = \mathbb{R}^2$ das System

$$x' = y, \qquad y' = -x + y(4 - x^2 - 4y^2).$$

Definieren Sie die Hilfsfunktion $H(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

a) Zeigen Sie: Die Menge $M := \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq H(x, y) \leq 2\}$ ist eine invariante Menge.
b) Zeigen Sie: M enthält keine Ruhelagen. Schließen Sie auf die Existenz eines periodischen Orbits in M.

Hinweis: Verwenden Sie in a) Polarkoordinaten.

3. Betrachten Sie für $\lambda, \mu, \gamma, a > 0$ das System

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda xy - \mu x + \mu a, \\ y' &= \lambda xy - \mu y + \gamma y, \\ z' &= \gamma y - \mu z. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das System im Fall $a\lambda > \mu - \gamma > 0$ genau eine nichttriviale Ruhelage $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{R}^3_+$ hat. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$V(x, y, z) = x - \overline{x} \ln x - \overline{y} \ln y$$

eine Ljapunovfunktion ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ sagen?

4. Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Randwertproblems 1. Ordnung auf $[0, \pi]$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{mit der Randbedingung} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$.

5. (a) Geben Sie alle Lösungen des Randwertproblems $u'' + u = 0$ mit $u(0) = u(\pi) = 0$ an.
(b) Lösen Sie das Randwertproblem $u'' - u = 1$ mit den Randbedingungen $u(0) = u'(0) = 0$.

6. Betrachten Sie die skalare autonome Differentialgleichung $x' = f(x)$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in (0, 1)$.

Geben Sie den ω-Limes $\omega(x_0)$ für $x_0 \in [0, 1]$ an.

Hinweis: Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ gilt: Falls für eine Lösung $x(t)$ der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} \in G$, dann ist $\bar{x}$ eine Ruhelage der DG.

7. Zeigen Sie, das der ω–Limes einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ mit beschränktem Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0) = \{x(t, x_0), t \geq 0\}$ abgeschlossen ist.

Hinweis: Es ist zu zeigen, dass falls $y_n \in \omega(x_0)$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, dass dann auch $y \in \omega(x_0)$. Approximieren Sie y_n durch Punkte der Bahn x.