1. (a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems $u'' = f(x)$ mit $u'(0) = \rho_1$, $u(2) = \rho_2$.

(b) Lösen Sie das Randwertproblem $u'' = \mathrm{e}^x - x^2$ mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$, $u(2) = 1$.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte des zweidimensionalen Laplaceoperators auf einem Rechteck $D = [0, a] \times [0, b]$ mit den (Dirichlet-)Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(a, y) = 0, &\quad y \in [0, b], \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, &\quad x \in [0, a], \end{aligned}$$

d.h. bestimmen Sie die Werte von λ, für die das RWP

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u$$

eine nichttriviale Lösung hat. Machen Sie dazu einen Separationsansatz

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

der auf Eigenwertprobleme für φ und ψ führt.

Hinweis: Es muss nicht gezeigt werden, dass man dadurch tatsächlich alle Eigenwerte erhält. Dies folgt aus der Vollständigkeit des mittels Separation erhaltenen Systems von Eigenfunktionen.

3. Gegeben ist die Wellengleichung mit Randbedingungen

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0\,, \;\; x \in [0, 1]\,, \, t \in \mathbb{R}\,.$$

Führen Sie einen Separationsansatz durch, d.h. bestimmen Sie alle Lösungen der Form $u(x, t) = w(t)v(x)$. Dieser Ansatz führt auf ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem für die Funktion v.
Bestimmen Sie damit die Lösung der Wellengleichung, die zusätzlich zu den Randbedingungen auch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = g(x), \;\; u_t(x, 0) = h(x)\,, \;\; x \in [0, 1]$$

mit geeigneten Funktion g , h erfüllt. Entwickeln Sie dazu die Lösung in eine Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Die Konvergenz der auftretenden Reihe muss nicht untersucht werden.

Hinweis: Der Separationsansatz führt auf $w''(t)v(x) = w(t)v''(x)$, und Division durch wv ergibt

$$\frac{w''}{w} = \frac{v''}{v}\,.$$

Die linke Seite hängt nur noch von t ab und die rechte nur von x. Die Gleichung kann nur dann für alle x und t erfüllt sein, wenn gilt

$$\frac{w''}{w} = \lambda, \;\; \frac{v''}{v} = \lambda\,, \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

durch die Substitution

$$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p\,dx} u(x)$$

in die Form

$$v'' + k(x)v = 0$$

gebracht werden kann. Geben Sie die Funktion k explizit an.

b) Wie wirkt sich diese Tranformation auf das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ aus?

c) Transformieren Sie die Hermitesche Differentialgleichung

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Eigenwertproblems

$$-(xu')' = \frac{\lambda}{x}u, \qquad u(1) = 0,\, u(\mathrm{e}) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass alle Eigenwerte positiv sind und man daher $\lambda = \mu^2\,,\ \mu \in \mathbb{R}$ setzen kann. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit u und integrieren Sie über das Intervall $[1, \mathrm{e}]$. Es handelt sich hier um eine Eulersche Differentialgleichung. Machen Sie daher einen Ansatz $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}\,.$

6. Gegeben ist das RWP

$$Lu := -(xu')' = f(x), \qquad u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion des RWP.

c) Zeigen Sie, dass das EWP $Lu = \lambda u$ nur reelle und positive Eigenwerte besitzt.

7. Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$Lu = u'' + \lambda u = 0$$

mit den Randbedingungen $u'(0) = 0$ und $u(l) = 0$, $l > 0$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem handelt.

b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte positiv sind, indem Sie die Gleichung $\lambda u = -u''$ mit u multiplizieren und partiell integrieren.

c) Bestimmen Sie die die Eigenfunktionen u_k.