1. Welche der folgenden Funktionen

a) $y(x) = \exp(x^3)\,,$

b) $y(x) = -1\,,$

c) $y(x) = 2\exp(x^3) - 1\,,$

d) $y(x) = -1 + \frac{1}{3x^2}$

sind Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 3x^2\,(y(x) + 1), \quad x \in \mathbb{R}\,?$$

2. Geben Sie bei den folgenden Differentialgleichungen die Ordnung an, entscheiden Sie ob sie linear oder nichtlinear sind und ob gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen vorliegen.

a) $y'(t) + y(t)\sin(t) = 1\,,$

b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0\,,$

c) $y''(t) = t\sin(y(t))\,,$

d) $y'(t) + A(t)B(t)y(t) = f(t)\,,$

wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $A, B \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{2\times 2})$.

3. Ein (lineares) Federpendel mit Reibung wird durch die Differentialgleichung

$$my'' = -ry' - ky$$

beschrieben. Dabei ist y die Auslenkung aus der Ruhelage $y = 0$, $m > 0$ die Masse, $r > 0$ der Reibungskoeffizient und $k > 0$ die Federkonstante.

a) Benützen Sie den Ansatz
$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}$$
mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$, um zwei verschiedene reelle Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu finden.

b) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von m, r und k.

c) Erhält man mit dieser Methode immer zwei Lösungen?

Hinweis: im Fall $\lambda \notin \mathbb{R}$ sind der Realteil und der Imaginärteil von $\mathrm{e}^{\lambda t}$ reelle Lösungen. Weisen sie dies nach!

4. Zeigen Sie, dass $u(x,t) = \sin(x \pm ct)$ und allgemeiner $u(x,t) = w(x \pm ct)$ mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

sind. Was ist die Bedeutung von $c \in \mathbb{R}^+$ und in welche Richtung bewegen sich diese Wellen? Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ die Ortsvariable und $t \in \mathbb{R}$ die Zeit.

5. Jede der Funktionen $\sin(x - 2t)$, $2\cos 3x + 5\sin 3x$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ und $\frac{x}{t}$ löst eine der folgenden Differentialgleichungen. Welche?
Überlegen Sie sich zu jeder Differentialgleichung auch den Typ, also ob sie linear oder nichtlinear, gewöhnlich oder partiell ist und welche Ordnung sie hat.

a) $x^2 y_{xxx} - 5xy_x + 7y = 0$

b) $\dot{y} + t^3 y = \mathrm{e}^{-t}$

c) $\dot{y} + ty^3 = \mathrm{e}^{-t}$

d) $\ddot{y} + 9y = 0$

e) $\ddot{x} + \sin x = 0$

f) $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$

g) $u_t + 2u_x = 0$

h) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

i) $u_t + uu_x = 0$

j) $u_t + uu_x = u_{xxx}$

6. Formulieren Sie die Differentialgleichungen

a) $y''(x) - \sin(x)\,(y'(x))^2 y(x) = \cosh(x) - (y(x))^2$,

b) $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$,

jeweils als ein System 1. Ordnung.

7. Eine Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t))\,,$$

bei der die rechte Seite nicht explizit von t abhängt, heißt autonom.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung einer autonomen Differentialgleichung translationsinvariant ist, dh. mit x ist auch $u(t) = x(t+a)$ mit $a, t \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

(b) Wählen Sie $f(x) = x(x-1)$ und lösen Sie die Differentialgleichung, indem Sie alle Terme, in denen x vorkommt auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Diese Methode heißt *Separation der Variablen*. Skizzieren Sie die Lösungen. Auf welchem Intervall existieren die Lösungen?

8. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt eine Ellipse in der Ebene. Zeichnen Sie die Ellipse. Bestimmen Sie einen Tangentialvektor, einen Normalvektor und die Gleichung der Tangente an die Ellipse in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) der Ellipse. Machen Sie dies auf zwei Arten:

a) Durch Auflösen der Gleichung nach x oder y.

b) Unter Verwendung der Parametrisierung $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.

9. Gegeben ist die Differentialgleichung $x' = -2tx^2$.

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

b) Verifizieren Sie, dass $x(t) = \frac{1}{t^2+c}$, $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung löst und skizzieren Sie einige dieser Lösungen.

c) Bestimmen Sie die Lösung des AWP $x(1) = \frac{1}{2}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert diese Lösung?

d) Bestimmen Sie die Lösung des AWP $x(1) = -\frac{1}{2}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert diese Lösung?

e) Gibt es eine Lösung des AWP $x(1) = 0$?

f) Welche Lösungen sind beschränkt?