1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Systeme

a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x$

b) $x' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$

2. Welche der angegebenen Funktionen $f : I \times B \to \mathbb{R}^n$ sind Lipschitz–stetig bzw. lokal Lipschitz–stetig bezüglich x?

a) $f(t,x) = \sin(tx)\,, \quad I = (a,b)\,,\ B = \mathbb{R}\,,$

b) $f(t,x) = \sin(tx)\,, \quad I = \mathbb{R}\,,\ B = \mathbb{R}\,,$

c) $f(t,x) = x\sin(t)\,, \quad I = \mathbb{R}\,,\ B = \mathbb{R}\,,$

d) $f(t,x) = A(t)x + g(t)\,,\ I = (a,b)\,, B = \mathbb{R}^n$, dabei ist $A(t)$ eine auf (a,b) stetige $n \times n$-Matrix und $f(t)$ eine auf (a,b) stetige vektorwertige Funktion

e) $f(t,x) = (x_1 \mathrm{e}^{x_2}\cos(t), \sin(x_1x_2))\,,\ I = \mathbb{R}\,,\ B = [-2,5] \times [0,10]$

3. Gegeben ist ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die bezüglich ihres zweiten Arguments Lipschitz–stetig ist mit Lipschitz–Konstante L.

Zeigen Sie: Sind zwei Lösungen $x_j\,,\ j = 1,2$ der Differentialgleichung $x_j'(t) = f(t, x_j(t))\,,\ t \in I$, gegeben, so gilt für alle $t > t_0 \in I$ die Abschätzung

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t_0) - x_2(t_0)|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|}\,.$$

4. Beweisen Sie: Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt. Falls $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich x ist, so ist f Lipschitz bezüglich x.

Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt. Angenommen $f(t,x)$ ist auf G nicht Lipschitz bezüglich x. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ Punkte (t_n, x_n), $(t_n, y_n) \in G$ existieren mit

$$\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| > n\,\|x_n - y_n\|.$$

Benützen Sie die Kompaktheit von G, um daraus einen Widerspruch zur lokalen Lipschitz-Eigenschaft herzuleiten.

5. Beweisen Sie die folgende allgemeine Version des **Lemmas von Gronwall:**

Seien u und $\delta\,, L : I = [t_0, t_1] \to [0,\infty]$ stetige Funktionen. Falls

$$u(t) \le \delta(t) + \int_{t_0}^{t} L(x)u(x)\,dx\,, \quad \forall t \in I\,,$$

dann gilt

$$u(t) \le \delta(t) + \int_{t_0}^{t} \delta(x)L(x)\mathrm{e}^{\int_x^t L(u)\,du}\,dx\,, \quad \forall t \in I\,.$$

Hinweis: Setzen Sie $y(t) := \int_{t_0}^t L(x)u(x)dx$ und zeigen Sie $y' \le Ly + L\delta$. Setzen Sie dann $z(t) := y(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t L(x)dx}$ und leiten Sie eine Differential-Ungleichung für $z(t)$ her.

6. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= t^2(1 - (x(t))^2) = f(t, x(t))\,, \quad t \in [1,3] \\ x(2) &= 1\,. \end{aligned}$$

Wählen Sie die Menge G im Satz von Picard–Lindelöf als $G = (1,3) \times B_1(1)$ und geben Sie eine Lipschitz–Konstante der Funktion $f(t, x(t))$ bezüglich dem 2. Argument an.

Für welches Intervall garantiert der Satz von Picard–Lindelöf die Existenz der Lösung?

7. Für (t,x) aus dem Rechteck $\{(t,x) : |t| < 10\,, |x-1| < c\} = (-10,10) \times B_c(1)$ ist die Funktion f definiert durch $f(t,x) = 1 + x^2$.

(a) Geben Sie mit dem Satz von Picard–Lindelöf ein Intervall $[-\delta, \delta]$ an, auf dem das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t))\,, \quad x(0) = 1\,,$$

genau eine Lösung auf $(-\delta, \delta)$ besitzt.

(b) Wie muss die Menge G gewählt werden, damit die Intervalllänge 2δ aus a) größtmöglich wird?

(c) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (durch Separation), also indem Sie alle Terme, in denen x vorkommt, auf eine Seite bringen und dann die Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Auf welchem Intervall existiert die Lösung?

8. Berechnen Sie die ersten drei sukzessiven Picarditerationen zu dem Anfangswertproblem

$$x'(t) = t - (x(t))^2\,, \quad t \in \mathbb{R},\ x(0) = 1\,.$$

9. Führen Sie vier Schritte der Picarditeration für das AWP $x' = x^2$, $x(0) = 1$ aus. Dies legt nahe, dass gilt

$$x_k(t) = 1 + t + t^2 + \cdots t^k + O(t^{k+1}).$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der exakten Lösung $x(t)$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ könnte man $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$ erwarten? Geben Sie ein $\delta > 0$ an, sodass die Picarditeration auf $[-\delta, \delta]$ gegen die exakte Lösung konvergiert.