1. Wir betrachten das Randwertproblem

$$x'' + g(x) = 0, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 0,$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und beschränkt ist. Die *Shooting-Methode* zur Lösung solcher Randwertprobleme besteht darin, das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$, $x'(0) = a$ zu lösen, und dann eine Nullstelle der Abbildung $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, defniniert durch $\Phi(a) = x(1, a)$, zu suchen. Dabei bezeichnet $x(t, a)$ die Lösung des Anfangswertproblems. Beweisen Sie mit dieser Methode die Existenz einer Lösung des Randwertproblems.

2. Betrachten Sie das AWP

$$x_1' = x_2 x_3, \quad x_2' = -x_1 x_3, \quad x_3' = 2, \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0.$$

Machen Sie einige Schritte der Picard-Iteration, ausgehend von der Startfunktion $x(t) = (0, 1, 0)^T$. Würde die Iteration konvergieren?
Versuchen Sie einen Ausdruck füe die n-te Iteration anzugeben. Lösen Sie dazu alternativ das angegebene Differentialgleichungssystem.

3. Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung haben und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall.

a) $x' = \sin(x^2 + t)\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$
b) $x' = (x^2 + t)\,\sin x\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$
c) $x' = \frac{t}{x}\,, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,\ x_0 \neq 0\,.$

4. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz bezüglich x. Zeigen Sie, dass jede der folgenden Bedingungen globale Existenz der Lösung des AWP $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ in Vorwärtszeit garantiert.

a) Es existiert $r > 0$ mit $f(t, x) \cdot x < 0$ für alle $\|x\| \geq r$.
b) Es existiert $k \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ mit $f(t, x) \cdot x \leq kx \cdot x$ für alle $\|x\| \geq r$.

5. Stetige Abhängigkeit von Anfangswert, Anfangszeitpunkt und Vektorfeld:

Es sei $x(t)$ die Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ mit maximalem Existenzintervall (t_-, t_+) und $y(t)$ Lösung des AWP $y' = g(t, y)$, $y(\tau_0) = y_0$. Dabei seien f, g stetig und lokal Lipschitz bezüglich x bzw. y.

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Intervall $I = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ mit $t_0 \in (a, b)$ gilt:

$\exists \delta_0 > 0$ und $C > 0$ so, dass für $\delta \in (0, \delta_0]$ und

$$\|x_0 - y_0\| \leq \delta, \quad |t_0 - \tau_0| \leq \delta, \quad \|f - g\| \leq \delta$$

die Lösung des AWP $y' = g(t, y), y(\tau_0) = y_0$ zumindest für $t \in I$ existiert und die Abschätzung

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta C \mathrm{e}^{L|t - t_0|}, \quad t \in I$$

erfüllt. Dabei ist

$$\|f - g\| := \max_{(t,x) \in K} \|f(t, x) - g(t, x)\|$$

mit einer geeigneten kompakten Umgebung K der Lösungskurve $\{(t, x(t)), t \in I\}$ und L eine Lipschitz-Konstante für f bezüglich x auf K.

6. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $t_0 \in J$. Eine Funktion $o \in C^1(J, \mathbb{R})$ heißt Oberlösung, falls

$$o'(t) > f(t, o(t)) \quad \forall t > t_0,$$

entsprechend wird eine Unterlösung definiert. Zeigen Sie: Falls $o \in C^1(J, \mathbb{R})$ eine strikte Oberlösung ist und $x \in C^1(J; R)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ ist, dann gilt:

$$x(t_0) < o(t_0) \Rightarrow x(t) < o(t) \quad \forall t \in (t_0, b).$$

7. Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 1 - t + x(t)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

soll mit dem Euler-Verfahren numerisch gelöst werden. Ziel ist es zu zeigen, dass die numerische Lösung für $h \to 0$ in jedem Gitterpunkt t_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ gegen die exakte Lösung konvergiert.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung x des Anfangswertproblems.

b) Mit x_n bezeichnen wir die Approximation des Euler-Verfahrens am Punkt $t_n = t_0 + nh$. Zeigen Sie, dass

$$x_n = (1 + h)^n (x_0 - t_0) + t_n\,.$$

c) Wir wählen $T > t_0$ beliebig und setzen die Schrittweite $h = \frac{T - t_0}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Approximation des Euler-Verfahrens am Punkt $t_n = T$ ist dann x_n. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \to \infty} x_n = x(T)$ gilt.