1. Ein Hund schwimmt in einem Fluss mit der (Relativ)-Geschwindigkeit v_h direkt auf seine am Ufer stehende Besitzerin zu, wird aber gleichzeitig in Strömungsrichtung mit der Geschwindigkeit v_f abgetrieben. Das Flussufer sei die x-Achse in der Ebene, die Besitzerin befinde sich im Ursprung und der Hund habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Position (x_0, y_0).

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, welche die Bewegung des Hundes beschreibt.

b) Sind die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes bei dieser Differentialgleichung erfüllt bzw. an welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf bei dieser Differentialgleichung erfüllt?

c) Berechnen Sie die Kurve $y(x)$, auf der sich der Hund bewegt.

d) Erreicht der Hund seine Besitzerin? Wie hängt das von v_h, v_f und (x_0, y_0) ab?

e) Führen Sie auch einige aussagekräftige numerische Experimente durch. Verwenden Sie dazu die Programme dfield und pplane, siehe `https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/`

2. Betrachten Sie das lineare System

$$x'(t) = A(t)x(t)\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem an.

Hinweis: Eine Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x_1(t) = x_2(t)$ und eine weitere kann mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert berechnet werden.

3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix für die Differentialgleichung

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die entsprechende Wronski-Determinante und verifizieren Sie die Aussage des Satzes von Liouville. Lösen Sie das AWP $x(0) = (-1, 1)^T$.

4. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x'(t) = A(t)x(t)$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn es eine reguläre Matrx $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $X(t) = Y(t)\,B$ für alle $x \in I$.

b) Die Matrix $X(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}$ ist ein Hauptfundamentalsystem, dh ein Fundamentalsystem $Y(t)$ mit der Eigenschaft $Y(t_0) = I_n$.

5. Sei $X \in C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ und $Y \in C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$.

a) Zeigen Sie die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(XY) = \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right).$$

b) Falls $X(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $t \mapsto (X(t))^{-1}$ in $C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$. Geben Sie $(X^{-1})'$ an.

c) Sei Y eine Fundamentalmatrix für das lineare System $x' = A(t)x$. Welche Differentialgleichung wird von Y^{-1} erfüllt?

6. Es sei $A(t)$ eine auf einem Intervall I stetige $n \times n$ Matrixfunktion. Es sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung

$$x' = A(t)x.$$

a) Zeigen Sie, dass im Falle einer reellen, schiefsymmetrischen Matrix $A(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. $A^T(t) = -A(t)$, $t \in I$) für Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung die Norm $\|x(t)\|_2$ konstant ist.

b) Für $t, \tau \in I$ definiert man die sogenannte *Übergangsmatrix*

$$\Phi(t, \tau) := Y(t)Y^{-1}(\tau).$$

Zeigen Sie:

1) $\Phi(t, \tau)$ ist die Hauptfundamentalmatrix der Differentialgleichung bezüglich des Zeitpunktes τ.
2) $\Phi(t, s) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, s) \quad \forall t, s, \tau \in I.$
3) $(\Phi(t, \tau))^{-1} = \Phi(\tau, t).$

c) Sei $\Phi(t, \tau)$ die in b) definierte Übergangsmatrix. Sei $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung , dass

$$x(t) := \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)b(\tau)d\tau$$

für beliebiges $t_0 \in I$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x' = A(t)x + b(t)$$

ist.

Bemerkung: Das ist genau die später behandelte Methode der *Variation der Konstanten* zur Bestimmung einer Partikulärlösung, siehe Skriptum.

7. Welche der folgenden Funktionen

a) $x(t) = (3\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{2t})^\top$
b) $x(t) = (3\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t)^\top$
c) $x(t) = (3\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^t)^\top$
d) $x(t) = (\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t})^\top$
e) $x(t) = (3\mathrm{e}^t, t^2\mathrm{e}^t)^\top$

kann eine Lösung einer Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sein? Bitte geben Sie eine ausführliche Begründung!