1. Definieren Sie die matrixwertige Funktion $Z(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)ds}$ mit $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass Z nicht unbedingt eine Fundamentalmatrix für

$$x' = A(t)x$$

ist. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Z eine Fundamentalmatrix ist.

2. Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $x' = A_i x$, $i = 1, 2, 3$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. **a)** Zeigen Sie, dass die $m \times m$-Matrix N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nilpotent ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte einer nilpotenten Matrix N .

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $x'(t) = Nx$ für $m = 3$ und zeichnen Sie das Phasenporträt im Fall $m = 2$.

4. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

a) $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{spur\, A}$

b) $\mathrm{e}^{A^T} = (\mathrm{e}^A)^T$

c) Aus $A^T = -A$ (d.h. A ist schiefsymmetrisch) folgt, dass e^{Ax} orthogonal ist und $\det \mathrm{e}^{Ax} = 1$.

5. **a)** Seien A , $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$ und $\mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

b) Im Allgemeinen gilt *nicht* $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$. Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

6. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2t \\ \frac{t+1}{t} \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\,.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und eine Fundamentalmatrix $Y(t)$.

b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante von $Y(t)$ und verifizieren Sie die Aussage des Satzes von Liouville.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

d) Lösen Sie das AWP $x(2) = (1, 0)^T$.

7. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 8\cos(t)\,.$$

Berechnen Sie die Partikulärlösung mit der Ansatz Methode und der Methode der Variation der Konstanten. Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an. Geben Sie die Lösung $y^\star$ an, die $\limsup_{t\to-\infty} |y^\star(t)| < \infty$ erfüllt.

Hinweis: $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$