**1.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und skizzieren Sie die Integralkurven.

a)

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

b)

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

c)

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

**Hinweis:** Benützen Sie im Fall einer diagonalisierbaren Matrix die Methoden aus der Vorlesung. Falls die Matrix nicht diagonalisierbar ist, lösen Sie die Differentialgleichung direkt.

**2.** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

und suchen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 3y' + 2y = 9\mathrm{e}^x$$

auf zwei Arten: a) mittels Variation der Konstanten und b) mittels der Ansatzmethode.

**3.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen. Geben Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem des homogenen Systems an. Berechnen Sie jeweils eine Partikulärlösung mit Hilfe der Ansatzmethode.

a) $y'' + y = \sin t + \sin 3t\,,$

b) $y'' + y = t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\cos t\,,$

c) $y'' - y = t\mathrm{e}^{-t}\,.$

d) $y'' + y' + y = \sin t$

e) $y'' - y = t^2\mathrm{e}^{-t}$

Untersuchen Sie, ob die Lösungen dieser ODEs stabil bzw. asymptotisch stabil sind.

**4.** Untersuchen Sie das Verhalten des gedämpften angetriebenen Oszillators

$$y'' + 2by' + y = \cos \omega t$$

in Abhängigkeit von $b \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie insbesondere den Fall $b = 0$ und $\omega = 1$. Man spricht von *Resonanz*, da das System genau mit der Eigenfrequenz angeregt wird.

Zeigen Sie, dass für $b = 0$ und $\omega \approx 1$ sogenannte *Schwebungen* auftreten, bei denen sich die Amplitude der Partikulärlösung periodisch ändert.

Wie verhält sich das System für $b << 1$ und $\omega \approx 1$?

**5.** Ein einfaches Räuber-Beute-Modell nach Lotka und Volterra hat die Form

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by)\,, \\ y' &= y(-c + dx)\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $x(t)$ beschreibt die Größe der Population der Beutetiere und $y(t)$ beschreibt die Größe der Population der Räuber als Funktion der Zeit $t$. Dabei ist natürlich nur der Bereich $x \geq 0$ und $y \geq 0$ biologisch sinnvoll.

a) Interpretieren Sie das Modell.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte.

c) Wie verhalten sich die Lösungen mit den Anfangswerten $(x_0, 0)$ bzw. $(0, y_0)$?

d) Für das System von Differentialgleichungen $x' = xg(y)$ und $y' = yh(x)$ ist $u(x,y) = \frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor. Also $-\frac{h(x)}{x}\,dx + \frac{g(y)}{y}\,dy = 0$, woraus folgt $F(x,y) = \int(-\frac{h(x)}{x}\,dx + \frac{g(y)}{y}\,dy) = const.$ Die Funktion $F(x,y)$ ist also eine *Erhaltungsgröße*, verwenden Sie das um eine implizite Darstellung der Integralkurven des gegebenen Räuber-Beute Modells zu finden.

e) Skizzieren Sie Integralkurven und interpretieren Sie das Verhalten der Lösungen.

**Hinweis:** Einer Lösung $x(t)\,, t \in I$ der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ entspricht eine Kurve, die in jedem auf der Kurve liegenden Punkt $x$ den Tangentialvektor $f(x)$ hat. Diese Kurven heißen Integralkurven des Vektorfeldes.

**6.** Betrachten Sie das skalare autonome System $x' = f(x)$ ,f stetig , welches die Ruhelage $\overline{x}$ habe. Zeigen Sie:

a) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < 0$ für $x \in (\overline{x}, \overline{x}+\delta)$ und $f(x) > 0$ für $x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x})$, dann ist $x \equiv \overline{x}$ asymptotisch stabil.

b) Falls es $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > 0$ für $x \in (\overline{x}, \overline{x}+\delta)$ oder $f(x) < 0$ für $x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x})$, dann ist $x \equiv \overline{x}$ instabil.

**7.** Schreiben Sie die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + by' + ky = 0$$

als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

a) Klassifizieren und skizzieren Sie für $k = 0, 1, -1$ die auftretenden Phasenporträts, wenn $b$ ganz $\mathbb{R}$ durchläuft.

b) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn $(k, b)$ die Gerade $k = -b$ durchläuft.

c) Klassifizieren und skizzieren Sie die auftretenden Phasenporträts, wenn $(k, b)$ den Kreis $k^2 + b^2 = 1$ durchläuft.

Überlegen und benützen Sie dazu eine Klassifikation ebener linearer Systeme in der Spur-Determinante Ebene. Wo treten jeweils Änderungen (Verzweigungen) im Stabilitätsverhalten bzw. im Phasenporträt auf?