1. Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = -x^2 \sin t$.

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, für welche $t \geq 0$ die Lösung existiert.

d) Ist die Lösung $x(t) = 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil?

2. Untersuchen Sie, ob für die folgende Differentialgleichung die Lösung $x(t) = 0$, $t \geq 0$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist? Untersuchen Sie auch, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x(0) = a$ auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt ist:

$$x' = \frac{x^2}{1+t^2}$$

3. Das folgende Beispiel zeigt, dass man im Fall nichtautonomer linearer Differentialgleichungen $x' = A(t)x$ von den Eigenwerten der Matrix A nicht auf die Stabilität der Ruhelage $\bar{x} = 0$ schließen kann. Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \, \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \, \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$ von $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ haben negativen Realteil.

b) $x(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}(-\cos t, \sin t)^T$ ist eine Lösung der Differentialgleichung.

c) Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist instabil.

4. Das folgende Lotka-Voltera Modell beschreibt das zeitliche Verhalten zweier Spezies x und y

$$\begin{aligned} x' &= 3x(2 - x + y), \\ y' &= y(3 + x - 3y). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems.

b) Untersuchen Sie die Stabilität und den Typ der Gleichgewichtspunkte mittels Linearisierung.

c) Zeichen Sie ein plausibles Phasenporträt im 1. Quadranten ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

d) Interpretieren Sie das Phasenporträt in Hinblick auf das Verhalten der beiden Populationen für $t \to \infty$.

5. Betrachten Sie das zweidimensionale System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -y + ax(x^2 + y^2), \\ y' &= x + ay(x^2 + y^2), \quad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und zeigen Sie

a) Der Ursprung ist für die Linearisierung ein Zentrum.

b) Für die nichtlineare Differentialgleichung ist der Ursprung für $a < 0$ stabil und für $a > 0$ instabil.

c) Zeichnen Sie das Phasenporträt für $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie in b) Polarkoordinaten.

6. Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung des mathematischen Pendels

$y'' + ry' + \sin y = 0$ mit Reibungskoeffizient $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System 1. Ordnung.

b) Bestimmmen Sie die Gleichgewichtspunkte dieses Systems 1. Ordnung.

c) Bestimmen Sie die Linearisierung an den Gleichgewichtspunkten und klassifizieren Sie in Abhängigkeit von $r \geq 0$ den Typ der Gleichgewichtspunkte der Linearisierung.

d) Was kann man über die Stabilität der Gleichgewichtspunkte für die nichtlineare Differentialgleichung aussagen?

e) Skizzieren Sie ein plausibles Phasenporträt für kleine positive Werte von r.

7. Zeigen Sie, dass $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ eine Ljapunovfunktion für das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_2^2 \\ x_2' &= -x_2^3 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

ist und schliessen Sie auf die Stabilitiätseigenschaften des Gleichgewichtspunktes $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierung treffen?