Lösung der Prüfung am 18.2.2021 **Mathematik 2 f. ET**

1. (12 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Berechnen Sie A^{-1} für diese Werte von a. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - a$ und $\lambda_3 = 1 + a$ die Eigenwerte von A sind, indem Sie passende Eigenvektoren bestimmen. (6 Punkte)

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit? (2 Punkte)

(a) Die Matrix A ist invertierbar, genau dann, wenn $\det A \neq 0$. Es gilt

$$\det A = 1 - a^2 = (1-a)(1+a).$$

Also ist A für $a \neq \pm 1$ invertierbar. 1 P

Invertieren funktioniert zum Beispiele mittels Gaustransformationen für $a \neq \pm 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\vec{z}_3 - a\vec{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{1-a^2}\vec{z}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right) \xrightarrow{\vec{z}_1 - a\vec{z}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right).$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{pmatrix}. \text{ 3 P}$$

(b) Betrachte $\lambda_1 = 1$. Ein Eigenvektor v_1 löst das homogene Gleichungssystem

$$0 = (A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1.$$

Eine möglicher Eigenvektor ist $v_1 = (0,1,0)^T$. 2 P

Betrachte $\lambda_2 = 1 - a$. Ein Eigenvektor v_2 löst das homogene Gleichungssystem

$$0 = (A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} v_2.$$

Eine möglicher Eigenvektor ist $v_2 = (1,0,-1)^T$. 2 P

Betrachte $\lambda_3 = 1 + a$. Ein Eigenvektor v_3 löst das homogene Gleichungssystem

$$0 = (A - \lambda_3 I)v_3 = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} v_2.$$

Eine möglicher Eigenvektor ist $v_3 = (1,0,1)^T$. 2 P

(c) Die Matrix A ist positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Dies ist der Fall für

$$-1 < a < 1. \text{ 2 P}$$

2. (11 Punkte) Es sei

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^y$$

(a) Berechnen Sie ∇f. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie näherungsweise die reelle Zahl

$$2.01^{3.02},$$

indem Sie f im Punkt $(x_0, y_0) = (2,3)$ linear approximieren. Verwenden Sie dabei $\ln(2) \approx 0.7$. Der Taschenrechner darf hier nur zum Addieren und Multiplizieren von Zahlen verwendet werden! (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f. (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Hessematrix von f. (3 Punkte)

(e) Bestimmen Sie den Typ des stationären Punkts von f. (2 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie bei (a), dass gilt $x^y = e^{y \ln x}$.

(a) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \ln x \end{pmatrix}.\ \text{1 P}$$

(b) Lineare Approximation liefert

$$f(x+\varepsilon, y+\delta) \approx f(x,y) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \delta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

und damit

$$2.01^{3.02} = f(2+0.01, 3+0.02) \approx 2^3 + 0.01 \cdot 3 \cdot 2^2 + 0.02 \cdot 2^3 \underbrace{\ln 2}_{\approx 0.7} \approx 8.232.\ \text{3 P}$$

Der korrekte Wert ist $2.01^{3.02} = 8.2348...$

(c) Für einen stationären Punkt (x_0, y_0) gilt $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)^T$. Wegen $x > 0$ folgt aus der zweiten Gleichung $x^y \ln x = 0$ $x = 1$ und damit folgt aus $0 = yx^{y-1} = y$. Also ist $(1,0)$ der einzige stationäre Punkt von f. 2 P

(d) Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \\ x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x & x^y \ln^2 x \end{pmatrix}.\ \text{3 P}$$

(e) Für den stationären Punkt $(1,0)$ gilt

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte ± 1 und ist somit indefinit. Also ist der stationäre Punkt $(1,0)$ ein Sattelpunkt. 2 P

3. (8 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x' + \frac{t}{t+1}x = 1 + t, \quad x(0) = 2.$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung der Form $x' + q(t)x = f(t)$ mit

$$q(t) = \frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}, \quad \text{und} \quad f(t) = t + 1.$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = ce^{-Q(t)} + e^{-Q(t)} \int e^{Q(t)} f(t)\, dt, \quad c \in \mathbb{R} \text{ 1 P}$$

für eine Stammfunktion $Q(t)$ von $q(t)$. Eine Stammfunktion von $q(t)$ ist

$$Q(t) = \int 1 - \frac{1}{t+1}\, dt = t - \ln(t+1). \text{ 2 P}$$

Somit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$x(t) = ce^{-t+\ln(t+1)} + e^{-t+\ln(t+1)} \int e^{t-\ln(t+1)}(t+1)\, dt = ce^{-t}(t+1) + e^{-t}(t+1) \int \frac{e^t}{t+1}(t+1)\, dt$$

$$= ce^{-t}(t+1) + e^{-t}(t+1) \int e^t\, dt = ce^{-t}(t+1) + e^{-t}(t+1)e^t = (t+1)\left(ce^{-t} + 1\right), \quad c \in \mathbb{R}. \text{ 3 P}$$

Einsetzen das Anfangswertes liefert die Gleichung

$$2 = x(0) = 1 \cdot (c+1) = c + 1$$

mit der Lösung $c = 1$. Also ist

$$x(t) = (t+1)\left(e^{-t} + 1\right) \text{ 2 P}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

4. (9 Punkte)

(a) (3 Punkte) Es seien $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ und $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{b}_1 = 2\vec{b}'_1 + 3\vec{b}'_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{b}'_1 + 2\vec{b}'_2.$$

Bestimmen Sie die Matrix M, für die gilt

$$[\vec{x}]_B = M[\vec{x}]_{B'}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Es gilt

$$[\vec{x}]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} [\vec{x}]_B, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

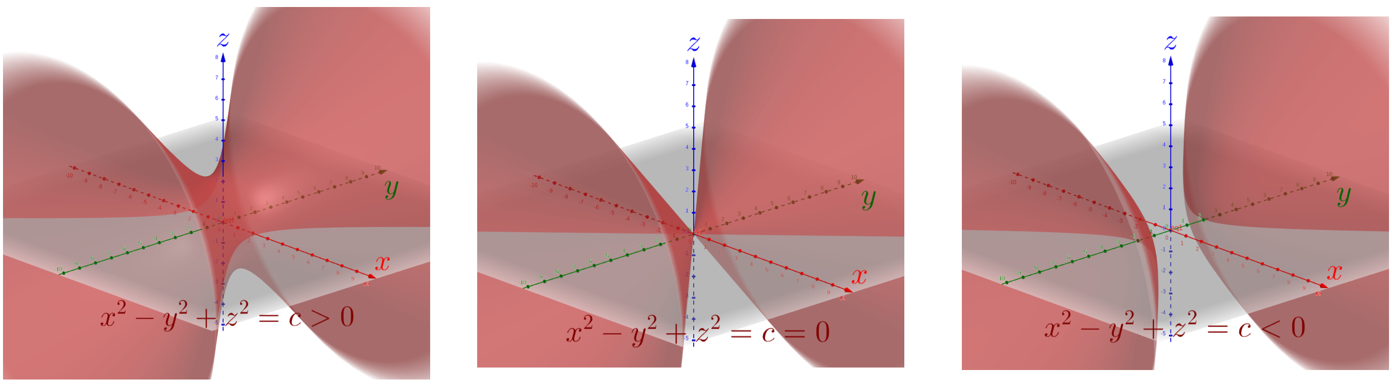
Also ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 3 P}$$

(b) (3 Punkte) Für $c \in \mathbb{R}$ definiert die Gleichung

$$x^2 - y^2 + z^2 = c$$

eine Fläche zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c, um welche Art von Flächen zweiter Ordnung es sich handelt, und fertigen Sie repräsentative Skizzen der auftretenden Flächen an.



(a) Für $c > 0$ (b) Für $c = 0$ (c) Für $c < 0$

Abbildung 1: Die Oberfläche, welche durch die Gleichung $x^2 - y^2 + z^2 = c$ bestimmt ist für $c > 0$ in (1a), für $c = 0$ in (1b) und für $c < 0$ in (1c)

Für $c > 0$ beschreibt die Gleichung ein einschaliges Hyperboloid, welches um die y-Achse rotiert, siehe Abb. 1a. 1 P

Für $c = 0$ beschreibt die Gleichung einen Kegel, welches um die y-Achse rotiert, siehe Abb. 1b. 1 P

Für $c < 0$ beschreibt die Gleichung ein zweischaliges Hyperboloid, welches um die y-Achse rotiert, siehe Abb. 1c. 1 P

(c) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Erklären Sie, warum aus der linearen Approximierbarkeit von f an einer Stelle $c \in \mathbb{R}^n$ die Stetigkeit von f an der Stelle c folgt.

Sei f an der Stelle c linear approximierbar, d.h., es gibt eine Konstante $a \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $r(h) = o(\|h\|)$, sodass

$$f(c+h) = f(c) + a \cdot h + r(h).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. So gilt für hinreichend kleine h

$$\|f(c+h) - f(c)\| = \|a \cdot h + r(h)\| \leq \|a \cdot h\| + \|r(h)\| \leq \|a\| \cdot \|h\| + \|h\| = (\|a\| + 1) \|h\| .$$

Damit folgt für alle $\|h\| < \delta := \frac{\varepsilon}{\|a\|+1}$

$$\|f(c+h) - f(c)\| < \varepsilon.$$

Also ist f stetig an der Stelle c. 3 P