Prüfung **Mathematik 2 f. ET** **24. 2. 2021**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	12	
2.	10	
3.	8	
4.	10	
Summe	40	

Hinweise:

1. Lösungen sind **handschriftlich** auf Papier aufzuschreiben.
2. **Unterlagen sind nicht erlaubt.**
3. **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**
4. Die Arbeitszeit beträgt **2 Stunden**.
5. **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Antworten ohne Rechengang bzw. ohne Begründung bringen keine Punkte.
6. Die Angabe muss nicht nochmals abgeschrieben werden.
7. Nach dem Ende der Arbeitszeit muss die Prüfung **gescannt werden** und **innerhalb von 10 Minuten** als ein file **Familienname.pdf** an **szmolyan@tuwien.ac.at** gemailt werden. Als erste Seite der Abgabe muss der **Studierendenausweis** gescannt werden.
8. **Falls nötig**, kann eine **mündliche online Nachbesprechung** der Prüfung stattfinden.

1. (12 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Berechnen Sie A^{-1} für diese Werte von a. (4 Punkte)

   (b) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - a$ und $\lambda_3 = 1 + a$ die Eigenwerte von A sind, indem Sie passende Eigenvektoren bestimmen. (6 Punkte)

   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit? (2 Punkte)

---

2. (10 Punkte) Es sei

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^y$$

   (a) Berechnen Sie ∇f. (1 Punkt)

   (b) Berechnen Sie näherungsweise die reelle Zahl

$$2.01^{3.02},$$

   indem Sie f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 3)$ linear approximieren. Verwenden Sie dabei $\ln(2) \approx 0.7$. Der Taschenrechner darf hier nur zum Addieren und Multiplizieren von Zahlen verwendet werden! (3 Punkte)

   (c) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von f. (2 Punkte)

   (d) Berechnen Sie die Hessematrix von f. (2 Punkte)

   (e) Bestimmen Sie den Typ des stationären Punkts von f. (2 Punkte)

   Hinweis: Beachten Sie, dass f nur für $x > 0$ definiert ist und dass gilt $x^y = e^{y \ln x}$.

---

3. (8 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x' + \frac{t}{t+1} x = 1 + t, \quad x(0) = 2.$$

---

4. (10 Punkte)

   (a) (3 Punkte) Es seien $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ und $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{b}_1 = 2\vec{b}'_1 + 3\vec{b}'_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{b}'_1 + 2\vec{b}'_2.$$

   Bestimmen Sie die Matrix M, für die gilt

$$[\vec{x}]_B = M[\vec{x}]_{B'}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

   (b) (4 Punkte) Für $c \in \mathbb{R}$ definiert die Gleichung

$$x^2 - y^2 + z^2 = c$$

   eine Fläche zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c, um welche Art von Flächen zweiter Ordnung es sich handelt, und fertigen Sie repräsentative Skizzen der auftretenden Flächen an. Untersuchen Sie, ob die Flächen singuläre Punkte enthalten und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

   (c) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Erklären Sie, warum aus der linearen Approximierbarkeit von f an einer Stelle $c \in \mathbb{R}^n$ die Stetigkeit von f an der Stelle c folgt.