Prüfung **Mathematik 2 f. ET** **19. 1. 2021**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	6	
2.	9	
3.	7	
4.	10	
5.	8	
Summe	40	

Hinweise:

1. Lösungen sind **handschriftlich** auf Papier oder am Tablet aufzuschreiben.
2. **Unterlagen sind nicht erlaubt.**
3. **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**
4. Die Arbeitszeit beträgt **2 Stunden**.
5. **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Antworten ohne Rechengang bzw. ohne Begründung bringen keine Punkte.
6. Die Angabe muss nicht nochmals abgeschrieben werden.
7. Nach dem Ende der Arbeitszeit muss die Prüfung **gescannt werden** und **innerhalb von 10 Minuten** als ein .pdf file an szmolyan@tuwien.ac.at gemailt werden.
8. **Falls nötig**, kann eine **mündliche online Nachbesprechung** der Prüfung stattfinden.

1. (6 Punkte) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ bx & - & y & = & 1 \end{array}$$

mit $b \in \mathbb{R}$. Sei A die Matrix des obigen Gleichungssystems.

(a) Bestimmen Sie für $b \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. Achtung: es gibt zwei unterschiedliche Fälle!

(b) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen A invertierbar ist, die Matrix A^{-1}.

---

2. (9 Punkte) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten.

(b) Bestimmen Sie den Kern von A.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix V, für die gilt $V^T AV = D$.

(d) Sei $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ die entsprechende quadratische Form. Welche Form hat $q(\vec{x})$ nach der Koordinatentransformation $\vec{x} = V\vec{y}$?

---

3. (7 Punkte) Es sei $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Berechnen Sie ∇u.

(b) Skizzieren Sie den Graph von u.

(c) Zeigen Sie, dass gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad zwei von $u(x, y)$ bei Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

---

4. (10 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x - 1)(x^2 - y^2).$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte?

(c) Zeichen Sie einige repräsentative Niveaulinien der Funktion f.

(d) An welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ können die Niveaulinien von f nicht lokal als Funktionen $y = h(x)$ beschrieben werden? Untersuchen Sie dazu, wo die Gleichung $f(x, y) - c = 0$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

Hinweis: Die Nievaumenge zum Niveau $c = 0$ ist einfach zu verstehen.

5. **Entscheiden** und **begründen** Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Die korrekte Entscheidung bringt 0.5 Punkte, die falsche Entscheidung führt zu einem Abzug von 0.5 Punkten. (Somit ist Raten keine gute Strategie.) Die korrekte Begründung bringt 1.5 Punkte.

(a) Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt

$$m < n \quad \Longrightarrow \quad Kern(A) = \{\vec{0}\}.$$

Antwort:

Begründung:

(b) Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $detA \neq 0$. Dann gilt

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \text{ linear unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_k \text{ linear unabhängig}$$

Antwort:

Begründung:

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\nabla f(0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0 \text{ gilt } D_v f(0) \neq 0.$$

Hinweis: $D_v f$ ist die Richtungsableitung von f in Richtung v.

Antwort:

Begründung:

(d) Das Anfangswertproblem $x' = -x^2$, $x(0) = 2021$ hat eine eindeutige Lösung.

Antwort:

Begründung: