Prüfung **Mathematik 2 f. ET** **15. 7. 2020**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	8	
2.	11	
3.	5	
4.	10	
5.	6	
Summe	40	

Hinweise:

1) **Bitte keine zusätzlichen Blätter abgeben! Diese würden beim Korrigieren nicht berücksichtigt werden. Geben Sie Ihre Antworten auf dem bei den einzelnen Beispielen dafür vorgesehen freien Platz.**

2) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

3) **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**

4) Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden.

5) **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Besser zu viel als zuwenig hinschreiben.

1. (8 Punkte) Es sei U der Unterraum des $\mathbb{R}^4$, der durch

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0)^T, \quad \vec{u}_2 = (-1, 3, 0, 1)^T$$

aufgespannt wird.

   (a) Berechnen Sie mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt eine Orthonormalbasis B von U.

   (b) Bestimmen Sie die Dimension des orthogonalen Komplementes $U^\perp$ von U.

   (c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B' von $U^\perp$.

   (d) Stellen Sie den Vektor $\vec{v} = (-1, 0, 0, 1)^T$ als

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

   mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in U^\perp$ dar.

2. (11 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 24\lambda - 20$ das charakteristische Polynom von A ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A und ihre algebraischen Vielfachheiten. Hinweis: -2 ist ein Eigenwert.

(c) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte und Basen der Eigenräume der Matrix A.

(d) Geben Sie die Jordansche Normalform J der Matrix an. Geben Sie eine Matrix T an, sodass gilt $T^{-1}AT = J$.

(e) Untersuchen Sie die Definitheit der Matrix A.

(f) Was für eine Fläche 2. Ordnung wird durch die Gleichung $\vec{x}^T A\vec{x} = c$, $c \in \mathbb{R}$ beschrieben? Achtung: die Antwort hängt von c ab!

3. (5 Punkte) Gegeben ist ein gerader Kreiskegel $K \subset \mathbb{R}^3$. Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis mit Radius $r = 2$ in der (x, y) Ebene und Mittelpunkt im Ursprung. Die Achse des Kegels ist die z-Achse. Die Höhe des Kegels $h = 4$.

   (a) Skizzieren Sie den Kegel.

   (b) Beschreiben Sie die Mantelfläche durch eine quadratische Gleichung in x, y, z und als Graph über der (x, y)-Ebene.

   (c) Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt der Mantelfläche mit $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Mantelfläche in diesem Punkt?

4. (10 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (y - 1)(x^2 - y^2).$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte?

(c) Zeichen Sie einige repräsentative Niveaulinien der Funktion f.

(d) An welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ können die Niveaulinien von f nicht lokal als Funktionen $x = h(y)$ beschrieben werden? Untersuchen Sie dazu, wo die Gleichung $f(x, y) - c = 0$ lokal nach x aufgelöst werden kann.

Hinweis: Die Nievaumenge zum Niveau $c = 0$ ist einfach zu verstehen.

5. (a) (2 Punkte) Erklären Sie im $\mathbb{R}^n$:

i) lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

ii) die Cauchy Schwarzsche Ungleichung.

(b) (1 Punkt) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, n$$

(c) (3 Punkte) Seien a, b stetige Funktionen $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x' + a(t)x = b(t)$$

an. Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in I$ an.