Prüfung **Mathematik 2 f. ET** **16. 10. 2020**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	10	
2.	10	
3.	6	
4.	8	
5.	6	
Summe	40	

Hinweise:

1) **Bitte keine zusätzlichen Blätter abgeben! Diese würden beim Korrigieren nicht berücksichtigt werden. Geben Sie Ihre Antworten auf dem bei den einzelnen Beispielen dafür vorgesehen freien Platz.**

2) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

3) **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**

4) Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden.

5) **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Besser zu viel als zuwenig hinschreiben.

1. (10 Punkte) Die Gleichung

$$q(\vec{x}) := 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 = 1$$

beschreibt eine Fläche 2. Ordnung im $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Fläche ein Ellipsoid ist.

(b) Das Polynom $p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16$ ist das charakteristische Polynom der Matrix A der quadratischen Form q. Die Menge $\{-1, 0, 4, -4\}$ enthält genau einen Eigenwert von A. Geben Sie diesen Eigenwert an.

(c) Bestimmen Sie die beiden Punkte auf dem Ellipsoid, die voneinander den größten Abstand haben und berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte

Hinweise: i) Denken Sie an die Achsen des Ellipsoids. ii) Man muss nicht alle Eigenvektoren von A berechnen!

2. (10 Punkte) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert als Spiegelung an der Ebene

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Sei A die Matrix dieser Abbildung, d.h. $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$.

(a) Kann man die Eigenwerte von A ohne Rechnung angeben? Wenn ja, machen Sie es.

(b) Berechnen Sie A.

(c) Kann man nachdem A berechnet wurde, A^{-1} ohne Rechnung angeben? Wenn ja, machen Sie es.

Hinweis: Aufgabe (a) hilft bei (b), wenn man zusätzlich die (einfach zu bestimmenden) Eigenvektoren verwendet.

3. (6 Punkte) Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(u, v)$ erfülle die Laplace Gleichung

$$f_{uu} + f_{vv} = 0.$$

Zeigen Sie: Für

$$u(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{2}, \quad v(x, y) := xy$$

erfüllt

$$w(x, y) := f(u(x, y), v(x, y))$$

die Laplace Gleichung

$$w_{xx} + w_{yy} = 0.$$

4. (8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy$.

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x, y) = 8$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$ lokal nach $x = h(y)$ aufgelöst werden kann, und berechnen Sie $h'(0)$.

(c) Analysieren Sie die Nievaumengen von f. Fertigen Sie für $(x, y) \in [-5, 5] \times [-10, 10]$ eine korrekte Skizze der Niveaumengen $f(x, y) = c$ für

$$c = -8, \quad c = -1, \quad c = 0, \quad c = 1, \quad c = 8$$

an.

5. (Theorie)

(a) (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sein $v \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie die Richtungsableitung $D_v f(a)$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$.

$D_v f(a) :=$

Wie berechnet man für stetig differenzierbares f die Richtungsableitung $D_v f(a)$?

$D_v f(a) :=$

(b) (2 Punkte)
Eine 2×2 Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 3$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und geometrischer Vielfachheit eins. Geben Sie die Jordansche Normalform von A an und erklären Sie wie man zu einem Eigenvektor $\vec{v}$ den passenden Hauptvektor $\vec{h}$ findet.

(c) (2 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x' = e^x, \quad x(0) = 0.$$

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

A1: Das Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar. (w) (f)

A2: Die Lösung des Anfangswertproblems existiert für $t \in [0, 2]$. (w) (f)