Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen, Markus Wess

Mathematik II für ET - Übung 1

Übungstermine: 11.3.-14.3. 11. Februar 2019

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen zu Vektorräumen korrekt sind. Begründen Sie Ihre Aussage.

a) Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ entspricht einem eindimensionalen Unterraum.
b) Der Vektorraum $\mathbb{C}$ entspricht dem Raum $\mathbb{R}^2$.
c) Der Vektorraum $\mathbb{R}$ lässt sich als eindimensionaler Unterraum des Vektorraums $\mathbb{C}$ auffassen.
d) Die zweidimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen durch den Ursprung.
e) Der Nullvektor ist linear abhängig.
f) Die lineare Hülle des Nullvektors ist ein Vektorraum.

Aufgabe 2:
Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Aufgabe 3:
Sei i die imaginäre Einheit. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 := \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^3$. Beweisen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}^3$ bilden.

Aufgabe 4:
Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Es existiert keine Basis B des $\mathbb{R}^2$ mit nur einem Vektor.
b) Es existiert keine Basis B des $\mathbb{R}^2$ mit drei oder mehr Vektoren.

Hinweis: Widerspruchsbeweis. Konstruieren Sie für (a) einen Vektor, der nicht als Linearkombination des Basisvektors dargestellt werden kann. Für (b) zeigen Sie, dass die Vektoren einer solchen Basis nicht linear unabhängig wären.

Aufgabe 5:
Π_n bezeichne für $n \in \mathbb{N}$ den Raum aller Polynome vom maximalen Grad n, d.h. ein beliebiges Element $p \in \Pi_n$ ist ein Polynom auf $\mathbb{R}$. Für zwei Elemente $p, q \in \Pi_n$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen

$$p + q : x \mapsto p(x) + q(x) \quad \text{ und } \lambda p : x \mapsto \lambda p(x).$$

a) Begründen Sie, warum Π_n ein reeller Vektorraum ist.
b) Zeigen Sie, dass die Monome

$$p_j : x \mapsto x^j, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

eine Basis dieses Vektorraumes bilden.
c) Welche Dimension hat Π_n?
d) Zeigen Sie, dass die Polynome

$$q_0 : x \mapsto 1, \quad q_j : x \mapsto \prod_{k=1}^{j} (x - k), \qquad j = 1, \ldots, n$$

linear unabhängige Vektoren aus Π_n sind.

Hinweis zu d: Koeffizientenvergleich. $\{q_0, \ldots, q_n\}$ sind sogar eine Basis von Π_n. Dies muss jedoch nicht bewiesen werden.

Aufgabe 6:
Geben Sie die Koordinaten der folgenden Polynome jeweils in den beiden Basen $\{p_0, p_1, p_2\}$ und $\{q_0, q_1, q_2\}$ des Polynomraumes Π_2 aus Aufgabe 5 an:
a) $x \mapsto x - 1$
b) $x \mapsto x^2 - 3x + 2$
c) $x \mapsto (x - 2)(x + 2)$