Mathematik 2 für Elektrotechnik **Übungsblatt 1** 09.03.2020

1. (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden durch die Punkte $A = (-3, 2)$, $B = (2, -1)$ mit den Koordinatenachsen. Fertigen Sie eine Skizze an.

   (b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden durch die Punkte $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, -1, 4)$ mit den Koordinatenebenen.

2. Untersuchen Sie die Vektoren

   (a) $\vec{v}_1 = (1, -3)^T$, $\vec{v}_2 = (2, 1)^T$

   (b) $\vec{v}_1 = (1, -3)^T$, $\vec{v}_2 = (-3, 9)^T$

   (c) $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$, $\vec{v}_3 = (1, 2)^T$

   (d) $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)^T$, $\vec{v}_3 = (1, 2, 3)^T$

   (e) $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)^T$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)^T$, $\vec{v}_3 = (-1, -2, 1)^T$

   (f) $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)^T$, $\vec{v}_3 = (1, 2, 3)^T$, $\vec{v}_4 = (1, 1, 0)^T$

   auf lineare Abhängigkeit.

3. (a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{b}_1 = (-4, -1)^T$ und $\vec{b}_2 = (\alpha, 1)^T$. Für welche Werte des Parameters α bilden die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ eine Basis B des $\mathbb{R}^2$?
   Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ die Koordinaten von $\vec{v} = (3, 0)^T$ bezüglich der Basis B.

   (b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{b}_1 = (1, \alpha, 0)^T$, $\vec{b}_2 = (0, 1, \alpha)^T$ und $\vec{b}_3 = (\alpha, 0, 1)^T$. Untersuchen Sie, für welche Werte von α die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ bilden.
   Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ die Koordinaten von $\vec{v} = (0, 0, 1)^T$ bezüglich der Basis B.

4. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ bzw. im $\mathbb{R}^4$

   (a) $W = \{(x_1, x_2, 0)^T : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

   (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0\}$

   (c) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$,

   (d) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 10\}$,

   (e) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$.

   Untersuchen Sie, ob W ein Unterraum ist. Falls ja, geben Sie eine Basis und die Dimension von W an. Geben Sie - soweit dies möglich ist - eine geometrische Interpretation von W.

5. Sei $E_5 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_5\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^5$ und

   $$\vec{b}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_5\ .$$

   Geben Sie die Koordinaten von $\vec{b}_i$, $i = 1, 2, 3$ bezüglich der kanonischen Basis an.

   Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ auf lineare Abhängigkeit?

   Geben Sie alle Möglichkeiten an, die Menge $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ mit Vektoren der kanonischen Basis E_5 zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen. Hier ist auch eine Begründung verlangt.

6. Sei P_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich zwei. Die kanonische Basis von P_2 ist $B = \{1, x, x^2\}$. Untersuchen Sie, ob $\tilde{B} := \{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis von P_2 ist.

   Geben Sie die folgenden Koordinaten an:

$$[p_1]_B, \quad [p_2]_B, \quad [p_3]_B.$$

   Wenn $\tilde{B}$ eine Basis ist, geben Sie $[x^2]_{\tilde{B}}$ an.

   (a)
$$p_1 = 2x^2 + x + 1, \quad p_2 = x^2 + 2x + 1, \quad p_3 = x^2 + x + 2,$$

   (b)
$$p_1 = x^2 + 2x + 1, \quad p_2 = x^2 + x + 1, \quad p_3 = x^2 - x + 1.$$

7. (a) Schreiben Sie die 2×4 Matrizen explizit an, die durch

$$a_{kl} = 2^{k-l}, \quad b_{kl} = 2^{|k-l|}, \quad c_{kl} = k^l$$

   gegeben sind.

   (b) Schreiben Sie die 4×2 Matrizen explizit an, die durch

$$a_{kl} = 2^{k-l}, \quad b_{kl} = 2^{|k-l|}, \quad c_{kl} = k^l$$

   gegeben sind.

   (c) Schreiben Sie die 4×4 Matrizen explizit an, die durch

$$a_{kl} = 2^{k-l}, \quad b_{kl} = 2^{|k-l|}, \quad c_{kl} = k^l$$

   gegeben sind.

   Geben Sie bei all diesen Matrizen die Zeile $\vec{z}_2$ und die Spalte $\vec{s}_3$ an. Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

8. Sei A die 6×6 Matrix mit $a_{ij} = i + j$ für $i, j \leq 4$, $a_{i,j} = i - j$ für $i, j \geq 5$, $a_{ij} = 0$ sonst. Schreiben Sie A explizit an. Ist A symmetrisch? Schreiben Sie die Zeilen $\vec{z}_2$, $\vec{z}_4$ und die Spalten $\vec{s}_3$, $\vec{s}_4$ explizit an. Was sind die Diagonalelemente der Matrix? Die Matrix A ist eine sogenannte Blockmatrix, wobei zwei Blöcke aus Nullmatrizen bestehen. Erklären Sie, was damit gemeint ist.

   Markieren Sie in der Matrix A die in den folgenden Summen auftretenden Matrixelemente und berechnen Sie die Summen

$$\sum_{k=1}^{6} a_{1k}, \quad \sum_{k=1}^{5} a_{k+1,k}, \quad \sum_{k=1}^{6} a_{k,7-k}, \quad \sum_{k=1}^{6} a_{5k} a_{k2}, \quad \sum_{k=1}^{6} a_{1k} a_{k1}.$$

   Bemerkung: Hier ist $a_{k+1,k}$ das Matrixelement in der $k+1$-ten Zeile und der k-ten Spalte, d.h. der Beistrich zwischen Zeilen- und Spaltenindex wurde der besseren Lesbarkeit wegen eingeführt.