Mathematik 2 für ET – Übung Nr. 1

Clemens Heitzinger, Christoph Helmer
Institut für Analysis und Scientific Computing

Übungstermine: 9.3.2021, 10.3.2021 und 11.3.2021 4. März 2021

Aufgabe 1: Wir betrachten die Menge $\mathcal{F}$ aller reellen Zahlenfolgen. Für Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} &:= (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty},\\ \alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} &:= (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Rechnen Sie nach, dass $\mathcal{F}$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum ist.

Aufgabe 2: Wir betrachten Beispiel 1.1 der Vorlesung, also die Menge $V := C^k(a,b)$ der k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation für $f, g \in V$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x),\\ (sf)(x) &:= sf(x).\end{aligned}$$

Rechnen Sie nach, dass V ein reeller Vektorraum ist.

Aufgabe 3: Gegeben seien der Vektorraum $\mathcal{F} := \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit denselben Verknüpfungen wie in Aufgabe 2, sowie die Teilmengen

$$\begin{aligned}A &:= \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\} \subseteq \mathcal{F},\\ B &:= \{f \in \mathcal{F} \mid f(42) = 0\} \subseteq \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) A ist ein Unterraum von $\mathcal{F}$.

(ii) B ist ein Unterraum von $\mathcal{F}$.

Aufgabe 4: Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}C &:= \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\right\}\\ D &:= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\right\}.\end{aligned}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) C ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$,

(ii) D ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5: Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{F}$ der reellen Zahlenfolgen mit den Verknüpfungen aus Aufgabe 1. Gegeben sei weiterhin die Menge der absolut summierbaren Folgen

$$\ell^1 := \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass ℓ^1 ein Unterraum von $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 6: Seien V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und U_1, $U_2 \subseteq V$ zwei Unterräume.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V.

Aufgabe 7: Wir betrachten die Mengen

$$A_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4, \quad A_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Prüfen Sie jede der beiden Mengen auf lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 8: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Menge

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge A linear abhängig/linear unabhängig?