Lösung der Prüfung am 18.2.2021 **Mathematik 3 f. ET UE**

1. (8 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{t}y' = t.$$

   (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Die lineare Unabhängigkeit ist nachzuweisen.

   (b) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung mittels Variation der Konstanten.

   (c) Geben Sie die allgemeine Lösung an.

   Hinweis zu (a): Setzen Sie zunächst $u := y'$ und lösen Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung für u.

(a) Die Funktion $y_1 = 1$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Substitution von $u = y'$ liefert die lineare homogene Differentialgleichung

$$u' - \frac{1}{t}u = 0$$

mit der Lösung

$$u = e^{-\int -\frac{1}{t}\,dt} = e^{\ln t} = t$$

Ein mögliches Fundamentalsystem ist damit

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 \quad \text{2 P.}$$

Diese beiden Lösungen der homogenen Lösung sind linear unabhängig, da

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t \neq 0. \text{ 1 P}$$

(b) Variation der Konstante liefert den Ansatz

$$x_p = c_1x_1 + c_2x_2.$$

mit dem Gleichungssystem

$$c_1' + \frac{1}{2}t^2c_2' = 0$$
$$tc_2' = \frac{t}{a_2} = t. \text{ 1 P}$$

Also $c_2' = 1$ und damit $c_2 = t$ und $c_1' = -\frac{1}{2}t^2$ und damit $c_1 = -\frac{t^3}{6}$. 2 P
Also

$$x_p = -\frac{t^3}{6} + t \cdot \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{3}t^3. \text{ 1 P}$$

(c) Die allgemeine Lösung ist

$$c_1 + c_2\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ 1 P}$$

2. (8 Punkte) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die gilt $\operatorname{div} v = 0$.

(b) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die gilt $\operatorname{rot} v = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die v ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie jeweils eine entsprechende Stammfunktion.

Es gilt

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cx \\ cy - az \\ ax - by \end{pmatrix} \quad \text{1 P}$$

(a) Aus

$$\operatorname{div} v = -c + c = 0$$

folgt $\operatorname{div} v = 0$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. 1 P

(b) Aus

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} a - b \\ b - a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

folgt $\operatorname{rot} v = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a = b$. 2 P

(c) Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion ist $\operatorname{rot} v = 0$. Also muss $c \in \mathbb{R}$ und $a = b$ gelten (siehe Punkt (b)). 1 P In diesem Fall folgt aus

$$v = \begin{pmatrix} az - cx \\ cy - az \\ ax - ay \end{pmatrix} = \nabla \phi$$

$\phi_z = a(x - y)$ und damit $\phi = axz - ayz + f(x, y)$. Differenzieren nach x liefert

$$az - cx = \phi_x = az + f_x(x, y).$$

Damit ist $f(x, y) = -\frac{cx^2}{2} + g(y)$ und $\phi = axz - ayz - \frac{cx^2}{2} + g(y)$. Differenzieren nach y liefert

$$cy - az = \phi_y = -az + g_y(y).$$

Daher gilt $g(y) = \frac{cy^2}{2}$. Also ist

$$\phi = axz - ayz - \frac{cx^2}{2} + \frac{cy^2}{2} \quad \text{3 P}$$

3. (7 Punkte) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Vollkegel

$$B := \{(x, y, z) : z^2 \geq x^2 + y^2\}$$

und

$$\rho(x, y, z) = e^{-\alpha r^3},$$

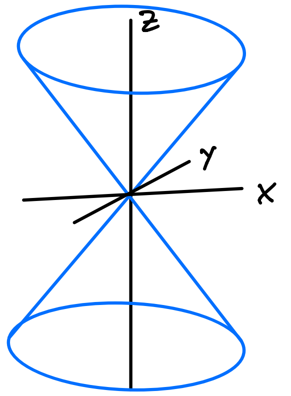
mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\alpha > 0$.

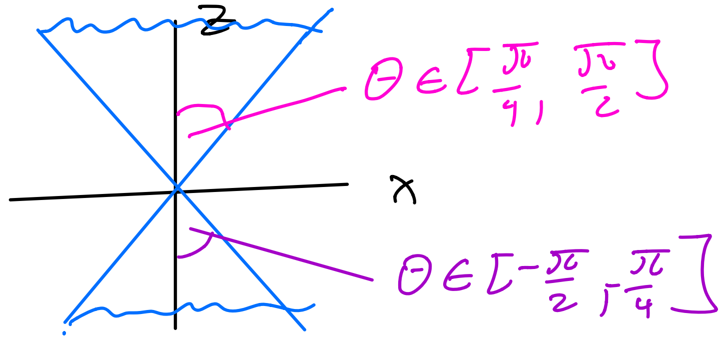
(a) Beschreiben Sie B in Kugelkoordinaten.

(b) Berechnen Sie

$$\int_B \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

(a) Der Bereich B ist ein Doppelkegel mit Spitze im Ursprung:





Wir verwenden die Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta$$

mit Funktionaldeterminante $r^2\cos\theta$. So gilt

$$B = \left\{(r, \phi, \theta) : r > 0, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}. \text{ 2 P}$$

(b) Die Funktion $\rho = e^{-\alpha r^3}$ ist radial symmetrisch. Daher kann man anstatt über B zu integrieren auch über den Teil von B in $z \geq 0$ (d.h. $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$) integrieren und das Ergebnis mit 2 multiplizieren.

$$\int_B \rho \; d(x, y, z) \overset{2\text{ P}}{=} 2 \boxed{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r^3} r^2 \cos\theta \; d\theta \; d\phi \; dr} \overset{1\text{ P}}{=} 2 \cdot 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^\infty e^{-\alpha r^3} r^2 \; dr =$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ \alpha r^3 = t \end{array} \right| = 4\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^\infty \frac{1}{3\alpha} e^{-t} \; dt = \frac{4\pi}{3\alpha}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \lim_{K \to \infty} (-e^{-t}) \Big|_0^K$$

$$= 4\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{3\alpha}. \text{ 2 P}$$

4. (8 Punkte) Der beschränkte Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ wird durch die Flächen $x = y^2$, $z = 0$ und $x + z = 1$ begrenzt. Weiters sei

$$a(x, y, z) := (y^2 z, xz - y^2, 2yz + 3z)^T.$$

(a) Skizzieren Sie B.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B} a \cdot dn$$

wobei n der nach außen gerichtete Normalvektor von ∂B ist.

(a) 2 P

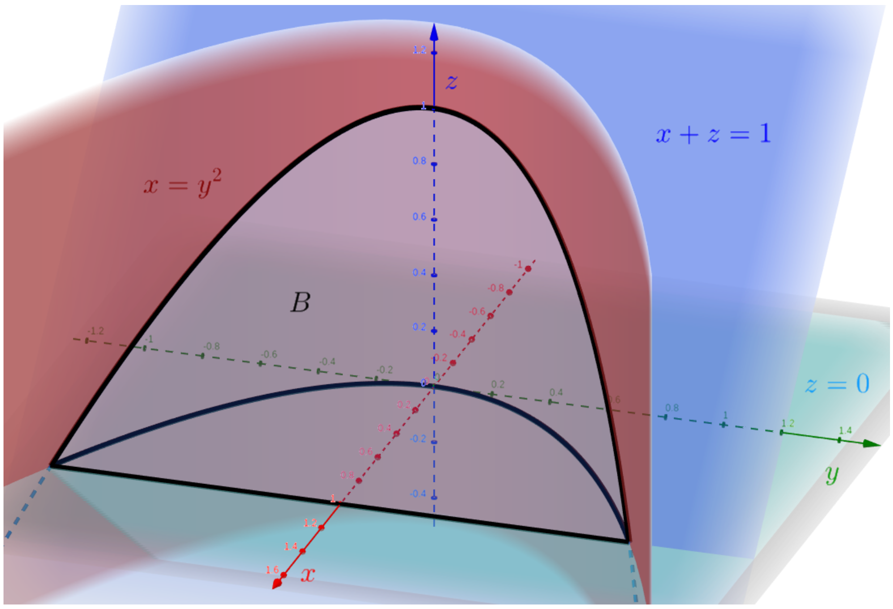


Abbildung 1: Der Bereich B wird von den Flächen $x = y^2$ (rot), $z = 0$ (türkis) und $x + z = 1$ (blau) begrenzt.

(b) Das Integral wird mit dem Gaußschen Integralsatz zu einem Bereichsintegral, das als iteriertes Integral berechnet wird.
Wenn zuerst nach y projiziert wird, erhält man

$$\int_{\partial B} a \cdot dn \overset{1\text{ P}}{=} \int_B div\ a\ dx \overset{1\text{ P}}{=} \int_B 3\ dx \overset{2\text{ P}}{=} 3 \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\ dx\ dz$$

$$= 6 \int_0^1 \int_0^{1-z} \sqrt{x}\ dx\ dz = 6 \int_0^1 \frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}}\ dz \overset{2\text{ P}}{=} \frac{8}{5}.$$

Wenn man zuerst nach z projiziert, ergibt eine etwas längere Rechnung denselben Wert.

5. (9 Punkte)

(a) (2 Punkte) Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Erklären Sie, wie man in diesem Fall unter Verwendung der dazugehörigen Eigenvektoren zwei linear unabhängige **reelle** Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = Ax$$

findet.

Sei $v_1 = a + ib$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha + i\beta$, so ist $v_2 = a - ib$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - i\beta$. Also bilden die Funktionen

$$z_1(t) = e^{(a+ib)t}(a + ib), \quad z_2(t) = e^{(a-ib)t}(a - ib)$$

ein komplexes Fundamentalsystem. Realteil und Imaginärteil von z_1,

$$x_1(t) = Re(z_1(t)) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)a - \sin(\beta t)b\right), \quad x_2(t) = Im(z_1(t)) = e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)a + \cos(\beta t)b\right),$$

bilden ein **reelles** Fundamentalsystem. 2 P

(b) (3 Punkte) Sei a ein stetig differenzierbares Vektorfeld im $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Erklären Sie detailliert unter Verwendung einer Skizze, warum die beiden Aussagen:

$$A_1 : \quad \int_C a \cdot dx \qquad \text{ist wegunabhängig}$$

und

$$A_2 : \quad \oint_C a \cdot dx = 0 \qquad \text{für alle geschlossenen Kurven } C$$

äquivalent sind.

Man muss zeigen $A_1 \Rightarrow A_2$ und $A_1 \Rightarrow A_2$.

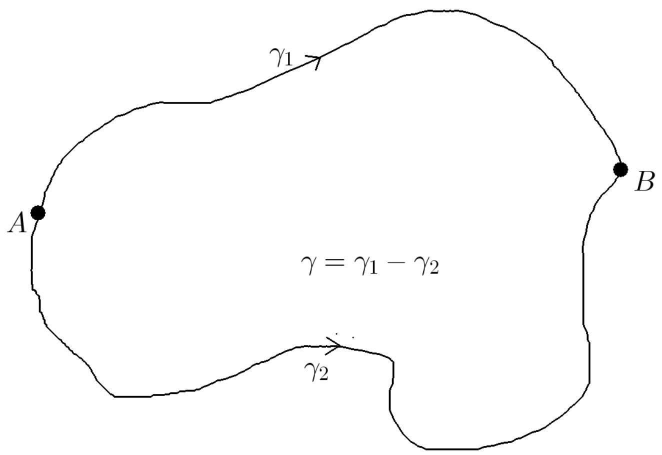


Abbildung 2: Diese Skizze wird in beiden Beweisschritten verwendet. Interpretation 1: Die geschlossene Kurve γ wird in zwei Kurven γ_1 und γ_2 mit Anfangspunkt A und Endpunkt B zerlegt. Interpretation 2: gegeben sind zwei Kurven γ_1 und γ_2 mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Dann ist $\gamma := \gamma_1 - \gamma_2$ eine geschlossene Kurve. 1 P

$A_1 \Rightarrow A_2$: Angenommen das Kurvenintegral ist wegunabhängig. Betrachte eine beliebige geschlossene Kurve γ. Wähle zwei Punkte A und B auf γ, die γ in zwei Kurven γ_1 und γ_2 zerlegen, die beide von A nach B laufen, siehe Abb. 2. Somit gilt $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.
Weil das Kurvenintegral wegunabhängig ist, haben die Kurvenintegrale entlang von γ_1 und γ_2 denselben Wert und es folgt

$$\oint_\gamma a \cdot dx = \int_{\gamma_1} a \cdot dx - \int_{\gamma_2} a \cdot dx = 0 \text{ 1 P}$$

$A_2 \Rightarrow A_1$: Angenommen für alle geschlossenen Kurven C gilt $\int_C a \cdot dx = 0$. Seine γ_1 und γ_2 zwei Kurven, die zwei beliebige Punkte A und B verbinden, siehe Abb. 2. So ist $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ eine geschlossene Kurve. Daher gilt

$$0 = \oint_\gamma a \cdot dx = \int_{\gamma_1} a \cdot dx - \int_{\gamma_2} a \cdot dx$$

und damit

$$\int_{\gamma_1} a = \int_{\gamma_2} a. \ 1 \text{ P}$$

(c) (4 Punkte) Sei $B = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. **Verifizieren** Sie für den Bereich B den Greenschen Satz für alle Vektorfelder v der Form

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Der Greensche Satz besagt: Für ein reguläres Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand, der im positiven Sinn durchlaufen wird, und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : \bar{G} \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_G \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \, d(x,y) = \int_{\partial G} v_1 \, dx + v_2 \, dy.$$

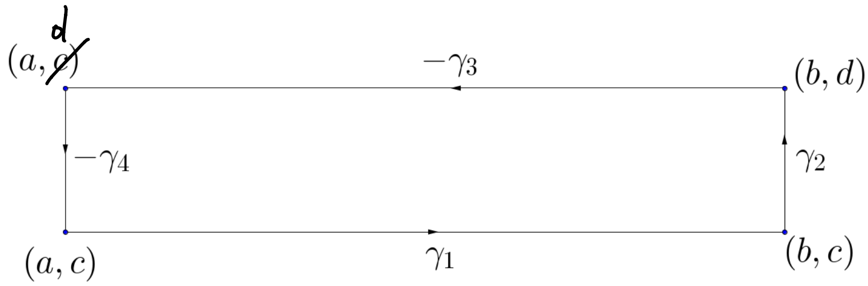


Abbildung 3: Das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ mit dem Rand $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$.

In der speziellen einfachen Situation, die hier betrachtet wird, gilt folgendes.

$$\int_G \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \, d(x,y) = \int_G f_x(x,y) \, d(x,y) = \int_c^d \int_a^b f_x(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d f(b,y) - f(a,y) \, dy. \ 2 \text{ P}$$

Eine Parameterdarstellung des Randes $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, siehe Abb. 3, ist

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b] \quad \text{mit } \gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [c,d] \quad \text{mit } \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} t \\ d \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b] \quad \text{mit } \gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_4(t) &= \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [c,d] \quad \text{mit } \gamma_4'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{\partial G} v_1 \, dx + v_2 \, dy$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1} v(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\ dt}_{=0} + \int_{\gamma_2} v(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\ dt - \underbrace{\int_{\gamma_3} v(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)\ dt}_{=0} - \int_{\gamma_4} v(\gamma_4(t))\gamma_4'(t)\ dt$$

$$= \int_c^d f(b,t) - f(a,t)\ dt.\ \text{2 P}$$

Damit ist der Greensche Satz verifiziert.