Lösung der Prüfung am 5.3.2021 Mathematik 3 f. ET UE

1. (8 Punkte) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der DG

$$x' = Ax, \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine Skizze an, die das Verhalten aller Lösungen im $\mathbb{R}^2$ illustriert.

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1 - 2i, \lambda_2 = -1 + 2i$ 1 P mit den Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \text{ 1 P}.$$

Also hat die DG die allgemeine komplexe Lösung

$$z(t) = \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{(-1-2i)t}}_{=:z_1(t)} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \text{ 2 P}$$

Der Real- und Imaginärteil von z_1 ergeben ein reelles Fundamentalsystem

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}. \text{ 2 P}$$

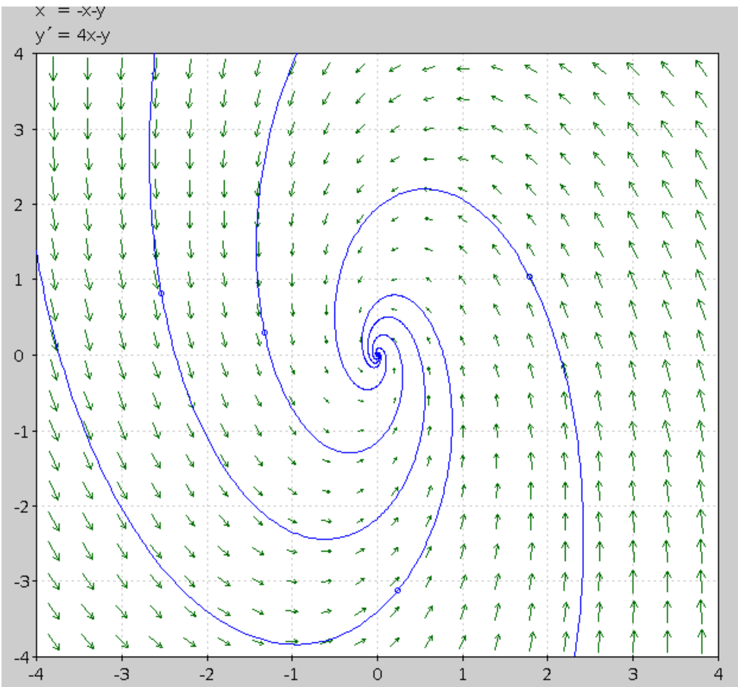
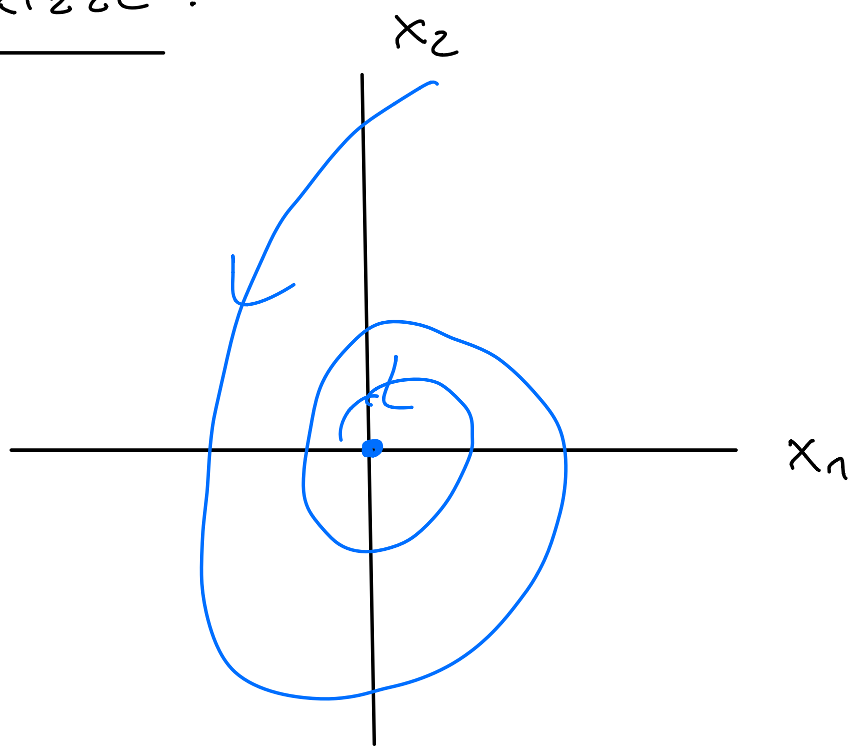


Abbildung 1: Skizze des Lösungsverhalten der DG $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$. In blau sind Lösungen eingezeichnet, die für $t \to \infty$ spiralförmig (gegen den Uhrzeigersinn) gegen die Ruhelage $(0, 0)$ konvergieren. 2 P

Handskizze :



$(0,0)$ Ruhelage

Lösungen spiralen zum Ursprung

für $t \to \infty$

2. (6 Punkte) Für welche Werte von $\omega \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichungen

$$x'' + 4x = \sin \omega t$$

Lösungen, die für $t \to \infty$ unbeschränkt sind? Geben Sie die unbeschränkten Lösungen an.

Die DG hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ 1 P. Also hat die homogne DG die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ 1 P}$$

die beschränkt ist. Für die Inhomogenität verwenden wir die Ansatzmethode. Wegen

$$\sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$$

ist wichtig, ob $i\omega$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Für $\omega \neq \pm 2$ ist $p(\omega i) \neq 0$. Damit hat in diesem Fall die Partikulärlösung die Form

$$x_p(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

für geeignete Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und ist somit beschränkt. 1 P

Für $\omega = \pm 2$ ist $p(\omega i) = 0$ und $p'(\omega i) \neq 0$. Damit hat in diesem Fall die Partikulärlösung die Form

$$x_p(t) = at \cos(\omega t) + bt \sin(\omega t)$$

für geeignete Werte $a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$ und ist somit unbeschränkt.

Also ist die Lösung nur für $\omega = \pm 2$ unbeschränkt. 1 P

Für die entsprechende komplexe Partikulärlösung erhält man

$$z_p(t) = \frac{te^{\pm 2it}}{p'(\pm 2i)} = \frac{te^{\pm 2it}}{\pm 4i}.$$

Die reelle Partikulärlösung erhält man als

$$x_p(t) = \operatorname{Im} z_p(t) = \mp \frac{t}{4} cos 2t. \text{ 1 P}$$

Die unbeschränkten Lösungen sind somit

$$x(t) c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \mp \frac{t}{4} \cos 2t \qquad \text{für } \omega = \pm 2. \text{ 1 P}$$

3. (10 Punkte) Es sei $B \subset R^3$ definiert durch

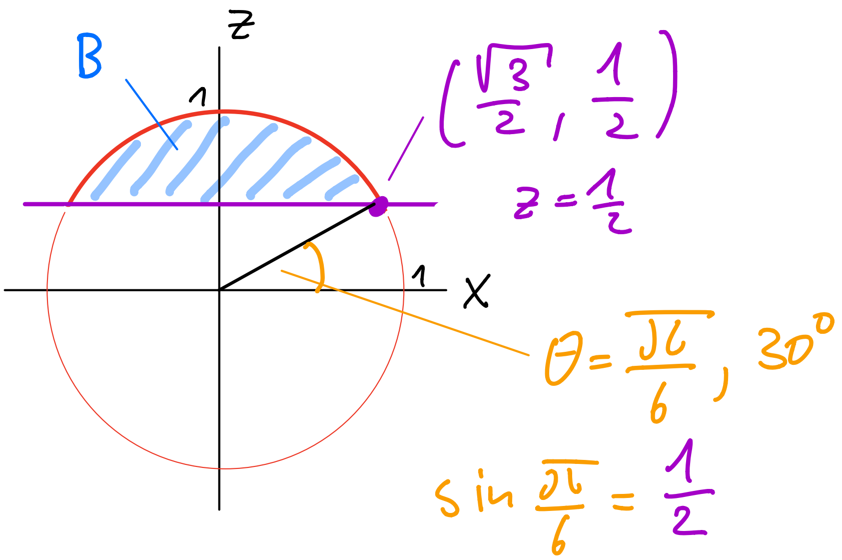
$$B = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

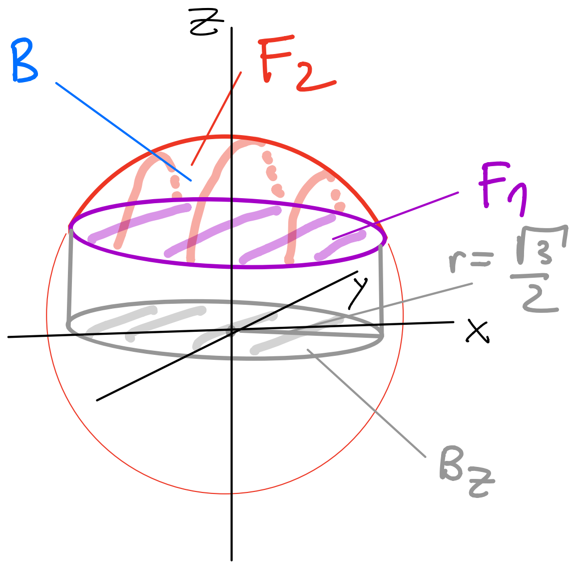
Berechnen Sie mittels Integration

(a) Das Volumen von B

(b) den Flächeninhalt der Randfläche von B.

Eine saubere Skizze ist hier ein ganz wichtiges Hilfsmittel!!!





(a) Der Bereich B ist projizierbar in z Richtung. Mit $B_z := \{(x, y) : \; x^2 + y^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ gilt

$$B = \left\{ (x, y, z) : \; (x, y) \in B_z, \; \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}. \text{ 1 P}$$

Daher gilt

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_{B_z} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, d(x, y) = \int_{B_z} \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2} \right) d(x, y). \text{ 1 P}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten für B_z erhält man weiter

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(r\sqrt{1 - r^2} - \frac{r}{2} \right) dr d\varphi = 2\pi \left(-\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^2}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\pi}{24}. \text{ 2 P}$$

(b) Die Oberfläche von B besteht aus einer Fläche F_1 in der Form der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ bei $z = \frac{1}{2}$ und einem Teil F_2, der auf der Kugeloberfläche liegt.
Der Flächeninhalt der Kreisscheibe F_1 ergibt sich elementargeometrisch als $\frac{3\pi}{4}$. 1 P

Alternativ kann man den Flächeninhalt von F_1 auch mittels Parameterdarstellung und Normalvektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad n(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad r \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

als

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \|n(r,\varphi)\| \; dr \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r \; dr \; d\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

berechnen.

Die Fläche F_2 ist am einfachsten mit Kugelkoordinaten (mit $r = 1$) zu parametrisieren , d.h. mittels

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \; \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]. \text{ 1 P}$$

Für den Normalvektor erhält man

$$n(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\|n(\varphi,\theta)\| = \cos\theta. \text{ 2 P}$$

Bemerkung: Dieses Resultat hätte man auch ohne Herleitung verwenden können, siehe Bsp. 1.14 und 1.15 im M3 Skriptum.

Damit ergibt sich der Flächeninhalt von F_2 als

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \frac{1}{2}) = \pi. \text{ 1 P}$$

Daher hat die Randfläche $F_1 + F_2$ von B den Flächeninhalt $\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. 1 P

4. (8 Punkte) Sei $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ ein Quader im $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie für den Bereich B den Gaußschen Integralsatz für alle Vektorfelder a der Form

$$a(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(x, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f, g, h.

Der Quader B und das Vektorfeld a erfüllen die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatz, der besagt:

$$\int_B \operatorname{div} a \; d(x, y, z) = \int_{\partial B} a \cdot dn. \; \textcolor{red}{1\text{ P}}$$

Es gilt

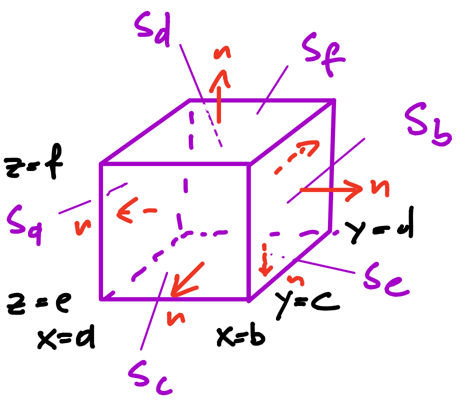
$$\operatorname{div} a = \frac{\partial h}{\partial z} \; \textcolor{red}{1\text{ P}}$$

und weiter

$$\int_B \operatorname{div} a \; d(x, y, z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \; dz \; dy \; dx = \int_a^b \int_c^d h(x, y, f) - h(x, y, e) \; dy \; dx. \; \textcolor{red}{1\text{ P}}$$

Nun berechnen wir den Fluss von a durch ∂B.

Für die 6 Seitenflächen und den nach außen gerichteten Normalvektor des Quaders B gilt $\textcolor{red}{1\text{ P}}$:



$$\begin{aligned}
S_a &: \; x = a, \; (y, z) \in [c, d] \times [e, f], \; n = (-1, 0, 0)^T, \\
S_b &: \; x = b, \; (y, z) \in [c, d] \times [e, f], \; n = (1, 0, 0)^T, \\
S_c &: \; y = c, \; (x, z) \in [a, b] \times [e, f], \; n = (0, -1, 0)^T, \\
S_d &: \; y = d, \; (x, z) \in [a, b] \times [e, f], \; n = (0, 1, 0)^T, \\
S_e &: \; z = e, \; (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \; n = (0, 0, -1)^T, \\
S_f &: \; z = f, \; (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \; n = (0, 0, 1)^T.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} a \cdot dn &= \int_{S_a} a \cdot dn + \int_{S_b} a \cdot dn + \int_{S_c} a \cdot dn + \int_{S_d} a \cdot dn + \int_{S_e} a \cdot dn + \int_{S_f} a \cdot dn \\
&= \int_c^d \int_e^f -f(y, z) \; dz \; dy + \int_c^d \int_e^f f(y, z) \; dz \; dy + \int_a^b \int_e^f -g(x, z) \; dz \; dx + \int_a^b \int_e^f g(x, z) \; dz \; dx \\
&\quad + \int_a^b \int_c^d -h(x, y, e) \; dy \; dx + \int_a^b \int_c^d h(x, y, f) \; dy \; dx \\
&= \int_a^b \int_c^d h(x, y, f) - h(x, y, e) \; dy \; dx. \; \textcolor{red}{2\text{ P}}
\end{aligned}$$

Da f nicht von x abhängt und g nicht von y abhängt, heben sich das erste und das zweite Intgegral, bzw. das dritte und vierte Integral auf.

Damit ist der Gaußsche Integralsatz verifiziert.

5. (a) (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $a : G \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Erklären Sie, warum die Integrabilitätsbedingung notwendig aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion von a ist.

(b) (4 Punkte) Definieren Sie die Eigenschaft: der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist in y-Richtung projizierbarer. Wie kann man diese Eigenschaft bei der Berechnung eines Integrals

$$\int_B f(x,y,z)d(x,y,z)$$

benützen?

(a) (4 Punkte)

Die Integrabilitätsbedingung im $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0. \text{ 1 P}$$

Falls a eine Stammfunktion φ besitzt, so gilt $a = \nabla\varphi$. und damit

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \text{ 1 P}$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung notwendig für die Existenz einer Stammfunktion.

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. 1 P

Falls G nicht zusammenhängend ist ist die Integrabilitätsbedingung aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. 1 P Ein Beispiel dafür ist das Vektorfeld

$$a(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

welches die Integrabilitätsbedingung erfüllt, aber keine Stammfunktion besitzt.

(b) (4 Punkte)

Die Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ ist in y-Richtung projizierbar, falls es eine messbare Menge $B_y \subset \mathbb{R}^2$ und stetige Funktionen $g, h : B_y \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in B_y, g(x,z) \leq y \leq h(x,z)\} \text{ 2 P}.$$

Dabei ist B_y die Projektion von B entlang der y-Achse. In diesem Fall gilt

$$\int_B f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_{B_y} \int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)\ dy\ d(x,z). \text{ 2 P}$$

Bemerkung: dabei muss man streng genommen auch noch Voraussetzungen an f stellen, so genügt z.B. die Stetigkeit von f.

Alternativ kann man fordern: f integrierbar über B und das innere Integral

$$\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)\ dy$$

existiert für alle $(x,z) \in B_y$.