Lösung der Prüfung am 12.11.2021 Mathematik 3 f. ET UE

1. (10 Punkte) Betrachtet wird die lineare Differentialgleichung

$$x'' + 2rx' + 9x = 0$$

mit Parameter $r \in [0, \infty)$.

Klassifizieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen in Hinblick auf Wachstum und dem Auftreten bzw. Fehlen von gedämpften und ungedämpften Oszillationen in Abhängigkeit vom Parameter $r \in [0, \infty)$.

Geben Sie in allen Fällen ein reelles Fundamentalsystem an. Skizzieren Sie jeweils das Verhalten der Lösungen als Funktion der Zeit. Achten Sie besonders auf die Werte von r, an denen sich das qualitative Verhalten der Lösungen ändert.

Das charakteristische Polynom der DG

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2r\lambda + 9$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_\pm = -r \pm \sqrt{r^2 - 9}.\ \text{2 P}$$

Damit erhalten wir die 4 Fällt $r = 0, 0 < r < 3, r = 3$ und $r > 3$.

- Im Fall $r = 0$ sind die beiden Nullstellen $\lambda_\pm = \pm 3i$ rein imaginär. Also sind die reellen Lösungen

$$x_1(t) = \cos(3t), \quad x_2(t) = \sin(3t)$$

rein (ungedämpft) oszillierend, siehe Abb. 1. Die Funktionen x_1, x_2 bilden ein Fundamentalsystem. 1.5 P

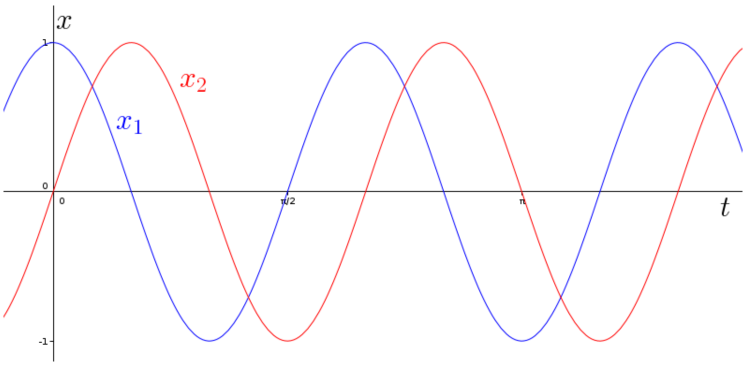

Abbildung 1: Lösungen x_1 (blau) und x_2 (rot) für $r = 0$. 0.5 P

- Im Fall $0 < r < 3$ sind die beiden Nullstellen $\lambda_\pm = -r \pm \sqrt{9 - r^2}i$ komplex mit negativem Realteil $-r$. Also sind die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-rt}\cos(\sqrt{9 - r^2}t), \quad x_2(t) = e^{-rt}\sin(3t)$$

gedämpft oszillierend, siehe Abb. 2. Die Funktionen x_1, x_2 bilden ein Fundamentalsystem. 1.5 P

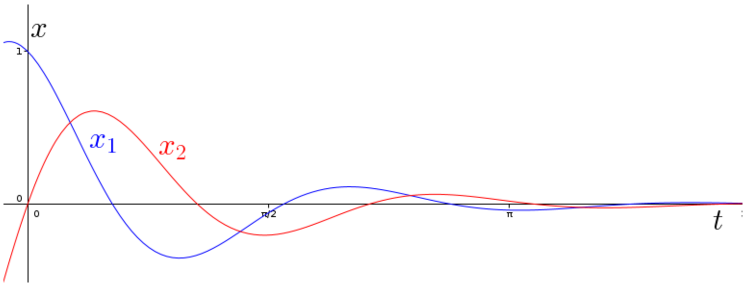

Abbildung 2: Lösungen x_1 (blau) und x_2 (rot) für $0 < r < 3$, $(r = 1)$. 0.5 P

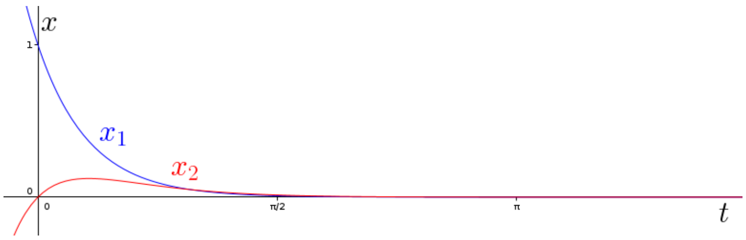

Abbildung 3: Lösungen x_1 (blau) und x_2 (rot) für $r = 3$. 0.5 P

- Im Fall $r = 3$ hat das charakteristische Polynom die reelle doppelte Nullstelle $\lambda = -3$. Also sind die reellen Lösungen
$$x_1(t) = e^{-3t}, \quad x_2(t) = te^{-3t}$$
exponentiell abfallend und nicht oszillierend, siehe Abb. 3. Die Funktionen x_1, x_2 bilden ein Fundamentalsystem. 1.5 P
- Im Fall $3 < r$ sind die beiden Nullstellen $\lambda_\pm = -r \pm \sqrt{r^2 - 9} < 0$ reell. Also sind die reellen Lösungen
$$x_1(t) = e^{\lambda_+ t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_- t}$$
exponentiell abfallend und nicht oszillierend, siehe Abb. 4. Die Funktionen x_1, x_2 bilden ein Fundamentalsystem. 1.5 P

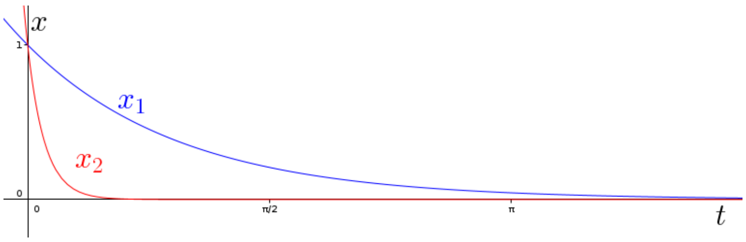

Abbildung 4: Lösungen x_1 (blau) und x_2 (rot) für $3 < r$, $(r = 5)$. 0.5 P

2. (8 Punkte) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der DG

$$x' = Ax, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine Skizze an, die das Verhalten aller Lösungen im $\mathbb{R}^2$ illustriert. Achten Sie dabei insbesondere auf die Ruhelage und Lösungen, die den Eigenräumen der Matrix A entsprechen.

Die Matrix A hat die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 1$ 1 P zu den Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ 2 P}$$

Damit besitzt die Ruhelage $(0,0)$ den stabilen Eigenraum $E_1 = \{v_1 t, t \in \mathbb{R}\}$ und den instabilen Eigenraum $E_2 = \{v_2 t, t \in \mathbb{R}\}$. Also ist $(0,0)$ ein Sattel 1 P, siehe Abb. 5.

Weiters bilden die Lösungen

$$x_1(t) = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ 1 P}$$

ein Fundamentalsystem.

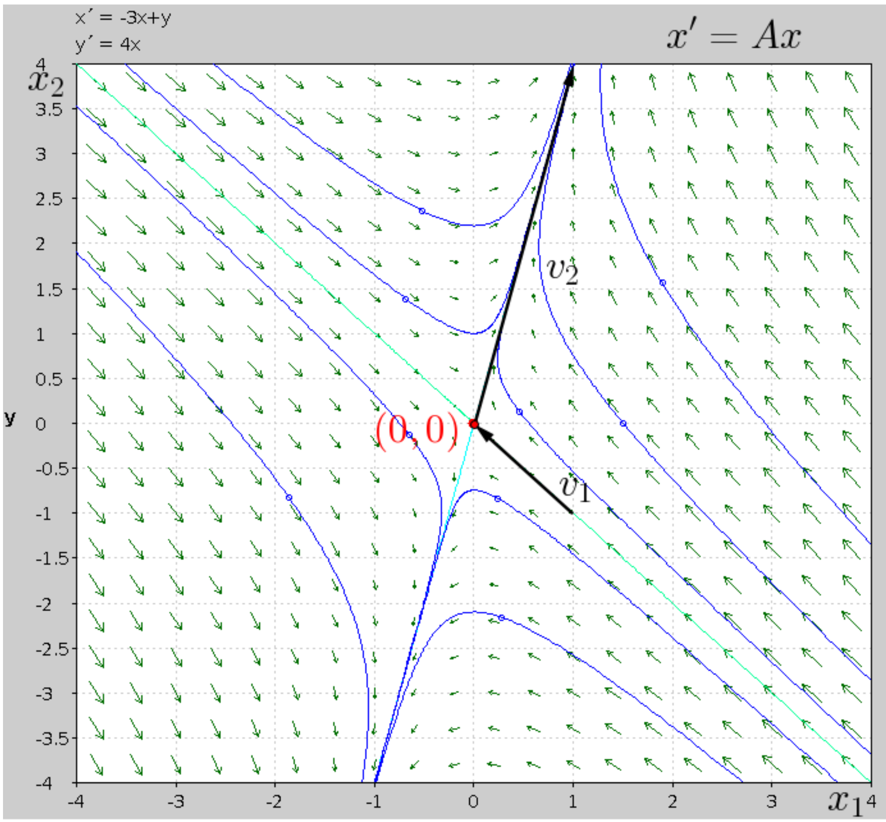

Abbildung 5: Phasenporträt der DG $x' = Ax$. 3 P

3. (8 Punkte) Eine radialsymmetrische Ladungsdichte im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 2, \\ \frac{1}{r^4}, & \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Berechnen Sie die im Halbraum $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0\}$ enthaltene Gesamtladung als uneigentliches Integral

$$\int_H \rho(x,y,z)\ d(x,y,z).$$

In Kugelkoordinaten gilt

$$\int_H \rho(x,y,z)\ d(x,y,z) \overset{3\text{ P}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(r) r^2 \cos\theta\ d\theta\ d\phi\ dr \overset{2\text{ P}}{=} 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r)\ dr$$

$$\overset{1\text{ P}}{=} 2\pi \int_0^2 r^2\ dr + 2\pi \int_2^\infty \frac{1}{r^2}\ dr \overset{2\text{ P}}{=} \frac{16\pi}{3} + \pi = \frac{19\pi}{3}.$$

- 2 P für Integralgrenzen
- 1 P für Funk.det.
- 1 P für Int nach θ
- 1 P für Int nach ϕ
- 1 P für Aufteilen
- 2 P für Int nach r

4. (8 Punkte) Sei $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ ein Quader im $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie für den Bereich B den Gaußschen Integralsatz für alle Vektorfelder a der Form

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y) \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f, g, h.

Das Gebiet B und das Vektorfeld a erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Gauß. Es gilt

$$\int_B \operatorname{div} a \; dx = \int_{\partial B} a \cdot dn \quad \text{1 P}$$

nachzurechnen.

Sei S_a die Seite von B, mit $x = a$. Analog werden die anderen Seiten benannt. Die Seiten von B werden parametrisiert durch

$$S_a : \begin{pmatrix} a \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad n_a(s,t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_b : \begin{pmatrix} b \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad n_b(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in [c,d], t \in [e,f]$$

$$S_c : \begin{pmatrix} s \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad n_c(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S_d : \begin{pmatrix} s \\ d \\ t \end{pmatrix}, \quad n_c(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in [a,b], t \in [e,f]$$

$$S_e : \begin{pmatrix} s \\ t \\ e \end{pmatrix}, \quad n_e(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad S_f : \begin{pmatrix} s \\ t \\ f \end{pmatrix}, \quad n_f(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [a,b], t \in [c,d] \text{ 2 P}$$

und

$$\operatorname{div} a(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z). \text{ 1 P}$$

Also gilt

$$\int_B \operatorname{div} a \; dx \overset{1\,\mathrm{P}}{=} \int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial f}{\partial x}(x,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \; dz \; dy \; dx$$

$$= \int_c^d \int_e^f f(b,z) - f(a,z) \; dz \; dy + \int_a^b \int_e^f g(x,d,z) - g(x,c,z) \; dz \; dx. \text{ 1 P}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\int_{\partial B} a \cdot dn \overset{1P \;\; (3P)^*}{=} \int_c^d \int_e^f -f(a,t) \; ds \; dt + \int_c^d \int_e^f f(b,t) \; ds \; dt + \int_a^b \int_e^f -g(s,c,t) \; ds \; dt + \int_a^b \int_e^f g(s,d,t) \; ds \; dt$$

$$+ \int_a^b \int_c^d -h(s,t) \; ds \; dt + \int_a^b \int_c^d -h(s,t) \; ds \; dt$$

$$= \int_c^d \int_e^f f(b,z) - f(a,z) \; dz \; dy + \int_a^b \int_e^f g(x,d,z) - g(x,c,z) \; dz \; dx. \text{ 1 P.}$$

Damit ist der Gaußsche Integralsatz verifiziert.

$(3P)^*$ für richtige Gleichung aber ohne Parameterdarstellungen

5. (6 Punkte) Theoriefragen

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie den Greenschen Satz (inklusive seiner Voraussetzungen).

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein **reguläres Gebiet** (0.25 P) mit einem **stückweise glatten Rand** (0.25 P) ∂G, der im **positiven Sinn durchlaufen** (0.25 P) wird. Weiters sei $a : \bar{G} \to \mathbb{R}^2$ ein **stetig differenzierbares Vektorfeld** (0.25 P). Dann gilt

$$\int_G \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial G} a_1 dx + a_2 dy. \text{ 1 P}$$

Punkte werden auf .5 aufgerundet.

(b) (2 Punkte) Sei $a(x,y,z)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Erklären Sie, warum die Integrabilitätsbedingung notwendig für die Existenz einer Stammfunktion von a ist. (Achtung: eine andere äquivalente Formulierung der Integrabilitätsbedingung ist keine Erklärung!)
Ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend?

Die Integrabilitätsbedingung besagt $\operatorname{rot} a = 0$. 0.5 P Angenommen a besitzt eine Stammfunktion F, so gilt $\nabla F = a$ und damit

$$\operatorname{rot} a = \operatorname{rot}(\nabla F) = 0.$$

Daher ist die Integrabilitätsbedingung notwendig. 1 P
Weil $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend. 0.5 P

(c) (2 Punkte) Sei $x : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks F und $c : [a,b] \to B$ die Parameterdarstellung einer differenzierbaren Kurve in B mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.
Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Für die durch $w(t) := x \circ c(t)$ parametrisierte Flächenkurve $K \subset F$ gilt $w'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

Diese Aussage ist richtig. Mit der Kettenregel folgt

$$w'(t) = \frac{\partial x}{\partial(u,v)}(c(t))c'(t). \text{ 1.5 P}$$

Weil x die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks ist, hat die Matrix $\frac{\partial x}{\partial(u,v)}(c(t))$ Rang 2 und damit folgt aus $c'(t) \neq 0$ auch $w'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. 0.5 P